Esercitazione 6 - Soluzioni

Francesco Davì

9 novembre 2012

Soluzioni esercizio 1

(a) **Dominio:** Il dominio della funzione è $D_f = \mathbb{R}$, in quanto la funzione è definita $\forall x \in \mathbb{R}$ o, equivalentemente, $\forall x \in (-\infty, +\infty)$.

Intersezioni con gli assi: Bisogna risolvere i due sistemi

1) $\begin{cases} x = 0 \\ y = x\,(x^2-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = 0 \\ y = x\,(x^2-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = x\,(x^2-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y = 0 \\ (x^2-1)^2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

I punti di intersezione della funzione e degli assi cartesiani sono quindi: $(0,0), (1,0), (-1,0)$.

Studio della derivata prima (punti stazionari, crescenza e decrescenza della funzione, massimi, minimi e flessi orizzontali):

$f'(x) = (1)(x^2-1)^2 + x(2(x^2-1)(2x)) = (x^2-1)^2 + 4x^2(x^2-1) = (x^2-1)(x^2-1+4x^2) = (x^2-1)(5x^2-1)$

Il dominio di $f'(x)$ è $\mathbb{R}$. Per stabilire gli intervalli in cui $f'(x)$ è positiva e quelli in cui è negativa, è sufficiente studiare il segno di x^2-1 e $5x^2-1$.

Si ha

$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow (x \leq -1)$ oppure $(x \geq 1)$

$5x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq \frac{1}{5} \Rightarrow (x \leq -\sqrt{\frac{1}{5}})$ oppure $(x \geq \sqrt{\frac{1}{5}})$

(osservazione: $\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, le tre scritture sono quindi equivalenti)

Si ottiene quindi il seguente schema:

x		-1		$-\frac{1}{\sqrt{5}}$		$\frac{1}{\sqrt{5}}$		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Nei punti di ascissa $-1, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}$ e 1 la derivata prima della funzione si annulla, tali punti sono quindi i punti stazionari della funzione.

Dallo studio del segno della derivata in un intorno di questi punti segue che i punti di ascissa -1 e $\frac{1}{\sqrt{5}}$ sono dei punti di massimo per $f(x)$ mentre i punti di ascissa $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ e 1 sono dei punti di minimo per $f(x)$. Non esistono punti di flesso orizzontale. Per determinare i valori dei massimi e dei minimi della funzione, è sufficiente calcolare il valore della funzione nei punti stazionari corrispondenti. Si ottiene che i punti di massimo della funzione sono $(-1, f(-1)) = (-1, 0)$ e $(\frac{1}{\sqrt{5}}, f(\frac{1}{\sqrt{5}})) = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{16}{25\sqrt{5}})$ mentre i punti di minimo della funzione sono $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, f(-\frac{1}{\sqrt{5}})) = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{16}{25\sqrt{5}})$ e $(1, f(1)) = (1, 0)$.

Studio della derivata seconda (concavità e convessità della funzione, flessi obliqui):

$f''(x) = (2x)(5x^2 - 1) + (x^2 - 1)(10x) = 2x(5x^2 - 1 + 5(x^2 - 1)) = 2x(10x^2 - 6) = 4x(5x^2 - 3)$

Il dominio di $f''(x)$ è $\mathbb{R}$. Per stabilire gli intervalli in cui $f''(x)$ è positiva e quelli in cui è negativa, è sufficiente studiare il segno di x e $5x^2 - 3$ (dato che 4 è positivo).

$x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$5x^2 - 3 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq \frac{3}{5} \Rightarrow (x \leq -\sqrt{\frac{3}{5}})$ oppure $(x \geq \sqrt{\frac{3}{5}})$

(osservazione: $\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{15}}{5}$, le quattro scritture sono quindi equivalenti)

Si ottiene quindi il seguente schema:

x		$-\sqrt{\frac{3}{5}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{5}}$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	*flesso*	$\cup$	*flesso*	$\cap$	*flesso*	$\cup$

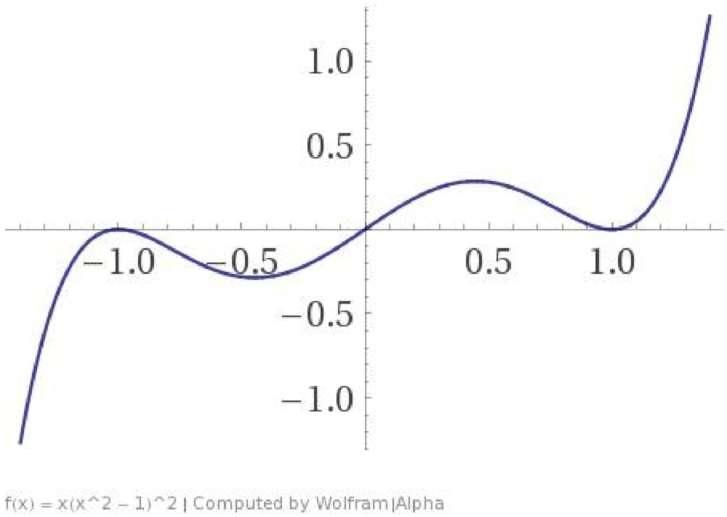
Nei punti di ascissa $-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0$ e $\sqrt{\frac{3}{5}}$ la derivata seconda della funzione si annulla, tali punti sono quindi i punti di flesso della funzione. In particolare, siccome in questi punti la derivata prima non si annulla, tali punti corrispondono a flessi obliqui. Per determinare i valori dei flessi obliqui della funzione, è sufficiente calcolare il valore della funzione nei punti corrispondenti. Si ottiene che i punti di flesso obliquo della funzione sono $(-\sqrt{\frac{3}{5}}, f(-\sqrt{\frac{3}{5}})) = (-\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{4}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}), (0, f(0)) = (0, 0)$ e $(\sqrt{\frac{3}{5}}, f(\sqrt{\frac{3}{5}})) = (\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{4}{25}\sqrt{\frac{3}{5}})$.

Asintoti: Bisogna studiare il comportamento della funzione nei punti in cui non è definita e negli estremi del dominio. Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$ quindi non ci sono punti in cui la funzione non è definita e di conseguenza non esistono asintoti verticali.

Per gli estremi del dominio, si ottiene

1) $\lim_{x \to +\infty} x(x^2 - 1)^2 = +\infty$

Siccome il limite della funzione per $x \to +\infty$ è uguale a $+\infty$, bisogna verificare se esiste un asintoto:
dato che $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x^2-1)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}(x^2-1)^2 = +\infty$, non esistono asintoti (orizzontali o obliqui) per $x \to +\infty$.
2) $\lim_{x\to-\infty} x(x^2-1)^2 = -\infty$
Siccome il limite della funzione per $x \to -\infty$ è uguale a $-\infty$, bisogna verificare se esiste un asintoto:
dato che $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(x^2-1)^2}{x} = \lim_{x\to-\infty}(x^2-1)^2 = +\infty$, non esistono asintoti (orizzontali o obliqui) per $x \to -\infty$.
Dato che la funzione è illimitata, non esistono massimo e minimo assoluto, quindi i massimi e i minimi calcolati precedentemente sono tutti relativi.
Grafico qualitativo della funzione:



(Osservazione: si può notare che la funzione è dispari e limitare l'analisi per $x \geq 0$, in quanto per ottenere l'analisi corrispondente a $x \leq 0$ è sufficiente applicare una simmetria centrale con centro nell'origine degli assi o, equivalentemente, una doppia riflessione: prima rispetto all'asse y e poi rispetto all'asse x o viceversa).

(b) Dominio: Si deve avere $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$. Il dominio della funzione è quindi $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ o, equivalentemente, $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.
Intersezioni con gli assi: Bisogna risolvere i due sistemi
1) $\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{x^2}{x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{0}{1}} = e^0 = 1 \end{cases}$
2) $\begin{cases} y = 0 \\ y = e^{\frac{x^2}{x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = e^{\frac{x^2}{x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \nexists x \in \mathbb{R} \end{cases}$ in quanto la funzione esponenziale è sempre positiva e mai uguale a zero.
Esiste quindi un unico punto di intersezione della funzione e degli assi cartesiani: $(0, 1)$.
Studio della derivata prima (punti stazionari, crescenza e decrescenza della funzione, massimi, minimi e flessi orizzontali):
$f'(x) = e^{\frac{x^2}{x+1}} \cdot \frac{(2x)(x+1)-(x^2)(1)}{(x+1)^2} = e^{\frac{x^2}{x+1}} \cdot \frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2} = e^{\frac{x^2}{x+1}} \cdot \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = e^{\frac{x^2}{x+1}} \cdot \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$
Il dominio di $f'(x)$ è $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Per stabilire gli intervalli in cui $f'(x)$ è positiva e quelli in cui è negativa, è sufficiente studiare il segno di x e $x + 2$, dato che $e^{\frac{x^2}{x+1}}$ e $(x + 1)^2$ sono positive $\forall x \in \mathbb{R}$.
Si ha
$x \geq 0$
$x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$
Si ottiene quindi il seguente schema:

x		-2		-1		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$n.d.$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$n.d.$	$\searrow$	min	$\nearrow$

(in cui si è evidenziato che $f(x)$ e $f'(x)$ non sono definite per $x = -1$).

Nei punti di ascissa -2 e 0 la derivata prima della funzione si annulla, tali punti sono quindi i punti stazionari della funzione. Dallo studio del segno della derivata in un intorno di questi punti segue che il punto di ascissa -2 è un punto di massimo per $f(x)$ mentre il punto di ascissa 0 è un punto di minimo per $f(x)$. Non esistono quindi punti di flesso orizzontale. Per determinare i valori del massimo e del minimo della funzione, è sufficiente calcolare il valore della funzione nei punti stazionari corrispondenti. Si ottiene che il punto di massimo della funzione è $(-2, f(-2)) = (-2, e^{-4})$ mentre il punto di minimo della funzione è $(0, f(0)) = (0, 1)$.
Studio della derivata seconda (concavità e convessità della funzione, flessi obliqui):
$f''(x) = (e^{\frac{x^2}{x+1}} \cdot \frac{x^2+2x}{(x+1)^2})(\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}) + (e^{\frac{x^2}{x+1}})(\frac{(2x+2)(x+1)^2-(x^2+2x)(2(x+1)(1))}{(x+1)^4}) =$

$\frac{e^{\frac{x^2}{x+1}}}{(x+1)^4} \cdot ((x^2+2x)^2 + (2x+2)(x+1)^2 - 2(x^2+2x)(x+1)) =$
$\frac{e^{\frac{x^2}{x+1}}}{(x+1)^4} \cdot (x^4+4x^3+4x^2+(2x+2)(x^2+2x+1)-2(x^3+x^2+2x^2+2x)) =$
$\frac{e^{\frac{x^2}{x+1}}}{(x+1)^4} \cdot (x^4+4x^3+4x^2+2x^3+4x^2+2x+2x^2+4x+2-2x^3-2x^2-$
$4x^2-4x) = \frac{e^{\frac{x^2}{x+1}}}{(x+1)^4} \cdot (x^4+4x^3+4x^2+2x+2)$

Il dominio di $f''(x)$ è $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Si ha che $e^{\frac{x^2}{x+1}}$ e $(x+1)^4$ sono positive $\forall x \in \mathbb{R}$ ma il polinomio $x^4+4x^3+4x^2+2x+2$ non è scomponibile (si può verificare con il metodo di Ruffini). Non essendo in grado di calcolare le radici del polinomio, non è possibile stabilire gli intervalli per cui $f''(x)$ è positiva e quelli in cui è negativa. Non sarà quindi possibile riportare sul grafico concavità e convessità dela funzione e eventuali flessi obliqui con precisione. (È possibile calcolare $f''(x)$ nei punti in cui $f'(x)$ si annulla e verificare la presenza di un massimo e di un minimo della funzione: $f''(-2) = -2 < 0$ e $f''(0) = 2 > 0$.)

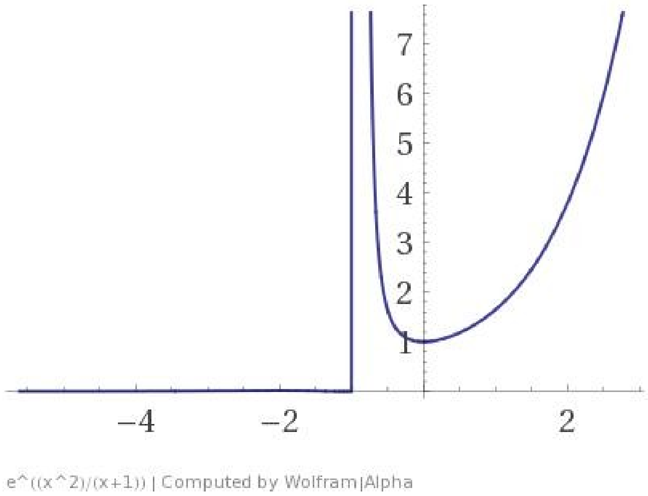
Asintoti: Bisogna studiare il comportamento della funzione nei punti in cui non è definita e negli estremi del dominio.

Per il punto $x = -1$ in cui la funzione non è definita, si ha
$\lim_{x\to -1^+} e^{\frac{x^2}{x+1}} = e^{\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{x+1}} = e^{+\infty} = +\infty$
$\lim_{x\to -1^-} e^{\frac{x^2}{x+1}} = e^{\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2}{x+1}} = e^{-\infty} = 0.$

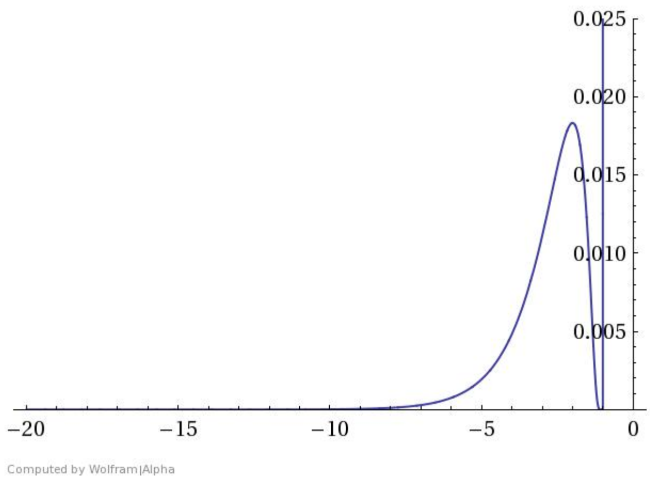
Dato che il limite per $x \to -1^+$ tende a ∞, la retta $x = -1$ è un asintoto verticale della funzione.

Per gli estremi del dominio, si ottiene
1) $\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{x^2}{x+1}} = e^{\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x+1}} = e^{+\infty} = +\infty$
Siccome il limite della funzione per $x \to +\infty$ è uguale a $+\infty$, bisogna verificare se esiste un asintoto:
dato che $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\frac{x^2}{x+1}}}{x} = +\infty$, non esistono asintoti (orizzontali o obliqui) per $x \to +\infty$.
2) $\lim_{x\to -\infty} e^{\frac{x^2}{x+1}} = e^{\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x+1}} = e^{-\infty} = 0$, quindi la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale della funzione (per $x \to -\infty$).

Grafico qualitativo della funzione:



In particolare, è bene evidenziare il comportamento della funzione per i valori di x minori di -1:



(nei due grafici, la retta verticale rappresenta l'asintoto verticale della funzione)

(c) Dominio: Si deve avere $x^3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$. Il dominio della funzione è quindi $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ o, equivalentemente, $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Intersezioni con gli assi: Bisogna risolvere i due sistemi

1) $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x^3-3x^2+1}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{0} \notin \mathbb{R} \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{x^3-3x^2+1}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = \frac{x^3-3x^2+1}{x^3} \end{cases}$ tale sistema non ha soluzioni reali in quanto $x^3 - 3x^2 + 1$ non ha radici reali.

Non esistono quindi punti di intersezione fra la funzione e gli assi cartesiani che siano reali.

Studio della derivata prima (punti stazionari, crescenza e decrescenza della funzione, massimi, minimi e flessi orizzontali):

$f'(x) = \frac{(3x^2-6x)(x^3)-(x^3-3x^2+1)(3x^2)}{x^6} = \frac{3x^5-6x^4-3x^5+9x^4-3x^2}{x^6} = \frac{3x^4-3x^2}{x^6} = \frac{3x^2(x^2-1)}{x^6} = \frac{3(x^2-1)}{x^4}$

Il dominio di $f'(x)$ è $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Per stabilire gli intervalli in cui $f'(x)$ è positiva e quelli in cui è negativa, è sufficiente studiare il segno di $x^2 - 1$, dato che 3 e x^4 sono positivi $\forall x \in \mathbb{R}$.

Si ha

$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \leq -1$ oppure $x \geq 1$

Si ottiene quindi il seguente schema:

x		-1		0		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$n.d.$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$n.d.$	$\searrow$	min	$\nearrow$

(in cui si è evidenziato che $f(x)$ e $f'(x)$ non sono definite per $x = 0$).

Nei punti di ascissa -1 e 1 la derivata prima della funzione si annulla, tali punti sono quindi i punti stazionari della funzione. Dallo studio del segno della derivata in un intorno di questi punti segue che il punto di ascissa -1 è un punto di massimo per $f(x)$ mentre il punto di ascissa 1 è un punto di minimo per $f(x)$. Non esistono quindi punti di flesso orizzontale. Per determinare i valori del massimo e del minimo della funzione, è sufficiente calcolare il valore della funzione nei punti stazionari corrispondenti. Si ottiene che il punto di massimo della funzione è $(-1, f(-1)) = (-1, 3)$ mentre il punto di minimo della funzione è $(1, f(1)) = (1, -1)$.

Studio della derivata seconda (concavità e convessità della funzione, flessi obliqui):

$f''(x) = 3\frac{(2x)(x^4)-(x^2-1)(4x^3)}{x^8} = 3\frac{2x^5-4x^5+4x^3}{x^8} = 3\frac{4x^3-2x^5}{x^8} = \frac{6x^3(2-x^2)}{x^8} = \frac{6(2-x^2)}{x^5}$

Il dominio di $f''(x)$ è $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Per stabilire gli intervalli in cui $f''(x)$ è positiva e quelli in cui è negativa, è sufficiente studiare il segno di

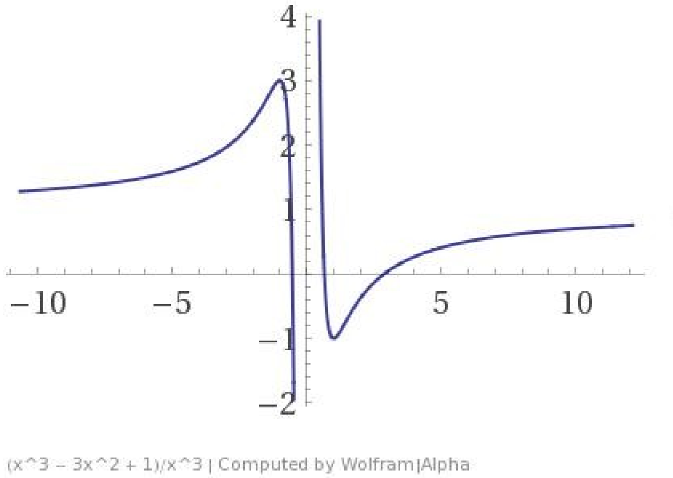
$2-x^2$ e x^5 (dato che 6 è positivo).
$2-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$
$x^5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$
Si ottiene quindi il seguente schema:

x		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$n.d.$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\cup$	$flesso$	$\cap$	$n.d.$	$\cup$	$flesso$	$\cap$

(in cui si è evidenziato che $f(x)$ e $f''(x)$ non sono definite per $x=0$).

Nei punti di ascissa $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ la derivata seconda della funzione si annulla, tali punti sono quindi i punti di flesso della funzione. In particolare, siccome in questi punti la derivata prima non si annulla, tali punti corrispondono a flessi obliqui. Per determinare i valori dei flessi obliqui della funzione, è sufficiente calcolare il valore della funzione nei punti corrispondenti. Si ottiene che i punti di flesso obliquo della funzione sono $(-\sqrt{2}, f(-\sqrt{2})) = (-\sqrt{2}, 1+\frac{5\sqrt{2}}{4})$ e $(\sqrt{2}, f(\sqrt{2})) = (\sqrt{2}, 1-\frac{5\sqrt{2}}{4})$.
Asintoti: Bisogna studiare il comportamento della funzione nei punti in cui non è definita e negli estremi del dominio.
Per il punto $x=0$ in cui la funzione non è definita, si ha
$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3-3x^2+1}{x^3} = +\infty$
$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^3-3x^2+1}{x^3} = -\infty$
quindi la retta $x=0$ è un asintoto verticale della funzione.
Per gli estremi del dominio, si ottiene
$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-3x^2+1}{x^3} = 1$
$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-3x^2+1}{x^3} = 1$
quindi la retta $y=1$ è un asintoto orizzontale della funzione.

Grafico qualitativo della funzione:



(Osservazione: la funzione ha quindi tre punti di intersezione con l'asse delle x ma, come stabilito in precedenza, nessuno di questi ha coordinate reali. È comunque possibile determinare indicativamente la loro posizione studiando il valore della funzione. Ricordando che la funzione è continua nel suo dominio, si può infatti notare che
- $f(-1) = 3 > 0$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \Rightarrow$ un'intersezione della funzione con l'asse delle x sarà tra $x = -1$ e $x = 0$,
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ e $f(1) = -1 < 0 \Rightarrow$ un'intersezione della funzione con l'asse delle x sarà tra $x = 0$ e $x = 1$,
- $f(2) = -\frac{3}{8} < 0$ e $f(3) = \frac{1}{27} > 0 \Rightarrow$ un'intersezione della funzione con l'asse delle x sarà tra $x = 2$ e $x = 3$)