Esercitazione 3 - Soluzioni

Francesco Davì

19 ottobre 2012

Esercizio 1

(a) Si deve avere $x \neq 0$ e $x \neq \pi$. Inoltre, si ha $\mathrm{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, quindi la disequazione in esame è equivalente a
$3\,(\frac{\cos(x)}{\sin(x)})^2 - 2\,\cos(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{3\,\cos^2(x) - 2\,\sin^2(x)\,\cos(x)}{\sin^2(x)} \geq 0 \Rightarrow$
$\frac{\cos(x)(3\,\cos(x) - 2\,(1-\cos^2(x)))}{\sin^2(x)} \geq 0 \Rightarrow \frac{\cos(x)(2\,\cos^2(x) + 3\,\cos(x) - 2)}{\sin^2(x)} \geq 0$ (si è usato $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$). Per risolvere l'esercizio, bisogna allora determinare l'unione delle soluzioni dei due sistemi di disequazioni
$\begin{cases} \cos(x)(2\,\cos^2(x) + 3\,\cos(x) - 2) \geq 0 \\ \sin^2(x) > 0 \end{cases}$ e
$\begin{cases} \cos(x)(2\,\cos^2(x) + 3\,\cos(x) - 2) \leq 0 \\ \sin^2(x) < 0 \end{cases}$.
Si può notare che $\sin^2(x) > 0 \Rightarrow \sin(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ e $x \neq \pi$, che coincide con la condizione di esistenza già calcolata (imposta dalla funzione cotangente), e che quindi $\sin^2(x) < 0$ non è soddisfatta per alcun valore di $x \in \mathbb{R}$. Da ciò segue che il secondo sistema non ha soluzioni reali, mentre per risolvere il primo sistema è sufficiente risolvere la disequazione $\cos(x)(2\,\cos^2(x) + 3\,\cos(x) - 2) \geq 0$, escludendo i valori indicati dalla condizione di esistenza. Bisogna allora determinare l'unione delle soluzioni dei due sistemi di disequazioni $\begin{cases} \cos(x) \geq 0 \\ 2\,\cos^2(x) + 3\,\cos(x) - 2 \geq 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} \cos(x) \leq 0 \\ 2\,\cos^2(x) + 3\,\cos(x) - 2 \leq 0 \end{cases}$.
Si ha $\cos(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ o $x = \frac{3\pi}{2}\pi$. Ponendo invece $y = \cos(x)$, per l'equazione $2\,y^2(x) + 3\,y - 2 = 0$ vale $a = 2 > 0$ e $\Delta = 25 > 0$. Le radici di tale equazione sono $y_1 = -2$ e $y_2 = \frac{1}{2}$. Il primo sistema è allora equivalente a
$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ oppure } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \\ \cos(x) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ oppure } \frac{5\pi}{3} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$
(in quanto $\cos(x) \in [-1, 1]$ e quindi non può mai essere minore o uguale di -2), la cui soluzione è $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ oppure $\frac{5\pi}{3} \leq x \leq 2\pi$, mentre il secondo sistema è equivalente a
$\begin{cases} \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\ -1 \leq \cos(x) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3} \end{cases}$

la cui soluzione è $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$. La soluzione dell'esercizio è quindi l'unione delle soluzioni dei due sistemi esclusi i valori determinati dalla condizione di esistenza: $0 < x \leq \frac{\pi}{3}$ oppure $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$ oppure $\pi < x \leq \frac{3\pi}{2}$ oppure $\frac{5\pi}{3} \leq x < 2\pi$.

(b) Si ha $\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin(x)\cos(x)+\sin(x)\cos(x) = 2\,\sin(x)\cos(x)$, da cui si ottiene $\sin(2x)+\sqrt{3}\,\cos(x) \geq 0 \Rightarrow 2\,\sin(x)\cos(x)+\sqrt{3}\,\cos(x) \geq 0 \Rightarrow \cos(x)(2\,\sin(x)+\sqrt{3}) \geq 0$. Bisogna allora determinare l'unione delle soluzioni dei due sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} \cos(x) \geq 0 \\ 2\,\sin(x)+\sqrt{3} \geq 0 \Rightarrow \sin(x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{e}$$

$$\begin{cases} \cos(x) \leq 0 \\ 2\,\sin(x)+\sqrt{3} \leq 0 \Rightarrow \sin(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} .$$

Il primo sistema è equivalente a

$$\begin{cases} 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ oppure } \frac{3\pi}{2}+2k\pi \leq x \leq 2\pi+2k\pi \\ 2k\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3}+2k\pi \text{ oppure } \frac{5\pi}{3}+2k\pi \leq x \leq 2\pi+2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z},$$

la cui soluzione è $2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}+2k\pi$ oppure $\frac{5\pi}{3}+2k\pi \leq x \leq 2\pi+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Il secondo sistema è invece equivalente a

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2}+2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}+2k\pi \\ \frac{4\pi}{3}+2k\pi x \leq \frac{5\pi}{3}+2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z},$$

la cui soluzione è $\frac{4\pi}{3}+2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Allora l'unione delle soluzioni dei due sistemi, e quindi la soluzione dell'esercizio, è uguale a: $2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}+2k\pi$ oppure $\frac{4\pi}{3}+2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ oppure $\frac{5\pi}{3}+2k\pi \leq x \leq 2\pi+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Si ha $\sin^2(x) = 1-\cos^2(x)$, da cui si ottiene $\sin^2(x)+3\,\cos^2(x)-\cos(x)-2 > 0 \Rightarrow 2\,\cos^2(x)-\cos(x)-1 > 0$. Ponendo $y = \cos(x)$ per l'equazione $2\,y^2-y-1 = 0$ vale $a = 2 > 0$ e $\Delta = 9 > 0$. Le radici di tale equazione sono $y_1 = -\frac{1}{2}$ e $y_2 = 1$. La soluzione di tale disequazione è quindi: $y < -\frac{1}{2}$ oppure $y > 1 \Rightarrow \cos(x) < -\frac{1}{2}$ oppure $\cos(x) > 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{3}+2k\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (dato che $\cos(x) \in [-1,1]$ e quindi non è mai strettamente maggiore di 1).

(d) Si deve avere $|\cos(x)| \neq 0 \Rightarrow \cos(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2}+2k\pi$ e $x \neq \frac{3\pi}{2}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (o equivalentemente ma in forma più sintetica: $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$). Si può notare che il denominatore è sempre positivo, per la presenza del modulo, quindi per risolvere l'esercizio è sufficiente calcolare la soluzione della disequazione: $2\,\sin(x)+\sqrt{3} \leq 0 \Rightarrow \sin(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$. La soluzione dell'esercizio è quindi: $\frac{4\pi}{3}+2k\pi \leq x < \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ oppure $\frac{3\pi}{2}+2k\pi < x \leq \frac{5\pi}{3}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (in quanto bisogna eliminare i valori determinati dalla condizione di esistenza).

(e) Si deve avere $\cos(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2}+2k\pi$ e $x \neq \frac{3\pi}{2}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (o equivalentemente ma in forma più sintetica: $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$).

Si può notare che la disequazione $2\,|\sin(x)| + \sqrt{3} > 0 \Rightarrow |\sin(x)| > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ è soddisfatta $\forall x \in \mathbb{R}$ (dato che il modulo di un espressione è sempre positivo), quindi per risolvere l'esercizio è sufficiente calcolare la soluzione della disequazione $\cos(x) > 0$: $2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ oppure $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{\lim_{x\to 0} 1-\cos(x)}{\lim_{x\to 0} \sin^2(x)} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$: forma indeterminata. Per risolvere l'esercizio bisogna quindi ottenere una forma equivalente dell'espressione in esame che permetta di risolvere il limite richiesto. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{\sin^2(x)(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos(x)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

(b) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{4\,x^2 + 3\,x - 7} - 2\,x = \infty - \infty$: forma indeterminata. Riscrivendo in forma equivalente l'espressione di cui si vuole calcolare il limite, si ottiene:
$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{4\,x^2 + 3\,x - 7} - 2\,x =$
$\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{4\,x^2 + 3\,x - 7} - 2\,x) \cdot \frac{\sqrt{4\,x^2+3\,x-7}+2\,x}{\sqrt{4\,x^2+3\,x-7}+2\,x} =$
$\lim_{x\to +\infty} \frac{(\sqrt{4\,x^2+3\,x-7})^2-(2\,x)^2}{\sqrt{4\,x^2+3\,x-7}+2\,x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4\,x^2+3\,x-7-4\,x^2}{\sqrt{4\,x^2+3\,x-7}+2\,x} =$
$\lim_{x\to +\infty} \frac{3\,x-7}{\sqrt{4\,x^2+3\,x-7}+2\,x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3\,x}{\sqrt{4\,x^2+3\,x-7}+2\,x} - \lim_{x\to +\infty} \frac{7}{\sqrt{4\,x^2+3\,x-7}+2\,x} =$
$\lim_{x\to +\infty} \frac{3}{\frac{\sqrt{4\,x^2+3\,x-7}+2\,x}{x}} - \frac{7}{\lim_{x\to +\infty} \sqrt{4\,x^2+3\,x-7}+2\,x} =$
$\frac{3}{\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{4\,x^2+3\,x-7}}{x} + \frac{2\,x}{x}} = \frac{3}{\lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{4\,x^2+3\,x-7}{x^2}}+2} = \frac{3}{\lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{x^2(4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2})}{x^2}}+2} =$
$\frac{3}{\lim_{x\to +\infty} \sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}+2} = \frac{3}{\sqrt{4}+2} = \frac{3}{4}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(7x)} = \frac{\lim_{x\to 0} \sin(2x)}{\lim_{x\to 0} \sin(7x)} = \frac{0}{0}$: forma indeterminata.
Utilizzando il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ e manipolando l'espressione, si ottiene:
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(7x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(7x)} \cdot \frac{7x}{7x} \cdot \frac{2x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \frac{7x}{\sin(7x)} \cdot \frac{2x}{7x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \frac{1}{\frac{\sin(7x)}{7x}} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{7} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \frac{1}{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{7x}} = \frac{2}{7}$.

(d) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+7}{3\,x+2} = \frac{\lim_{x\to -\infty} x^2+7}{\lim_{x\to -\infty} 3\,x+2} = -\frac{\infty}{\infty}$: forma indeterminata. Riscrivendo in forma equivalente l'espressione di cui si vuole calcolare il limite, si ottiene:
$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2(1+\frac{7}{x^2})}{x(3+\frac{2}{x})} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x(1+\frac{7}{x^2})}{3+\frac{2}{x}} = \frac{\lim_{x\to -\infty} x \cdot \lim_{x\to -\infty}(1+\frac{7}{x^2})}{\lim_{x\to -\infty}(3+\frac{2}{x})} = \frac{\lim_{x\to -\infty} x \cdot (1+\lim_{x\to -\infty} \frac{7}{x^2})}{3+\lim_{x\to -\infty} \frac{2}{x}} = \frac{-\infty\cdot(1-0)}{3+0} = \frac{-\infty}{3} = -\infty$.

(e) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+7}{-3\,x+2}=\frac{\lim_{x\to-\infty}x^2+7}{\lim_{x\to-\infty}-3\,x+2}=\frac{\infty}{\infty}$: forma indeterminata.
Riscrivendo in forma equivalente l'espressione di cui si vuole calcolare il limite, si ottiene:
$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(1+\frac{7}{x^2})}{x(-3+\frac{2}{x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(1+\frac{7}{x^2})}{-3+\frac{2}{x}}=\frac{\lim_{x\to-\infty}x\cdot\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{7}{x^2})}{\lim_{x\to-\infty}(-3+\frac{2}{x})}=$
$\frac{\lim_{x\to-\infty}x\cdot(1+\lim_{x\to-\infty}\frac{7}{x^2})}{-3+\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}}=\frac{-\infty\cdot(1-0)}{-3+0}=\frac{-\infty}{-3}=+\infty.$

(f) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2\,x^2+3\,x+1}{x^3+2\,x-3}=\frac{\infty}{\infty}$: forma indeterminata.
Riscrivendo in forma equivalente l'espressione di cui si vuole calcolare il limite, si ottiene:
$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\,x^2+3\,x+1}{x^3+2\,x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^3(1+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{x(1+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3})}=$
$\frac{2}{\lim_{x\to+\infty}x}=0.$

(g) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2\,x^2+1}{x^2+7\,x-4}=\frac{\infty}{\infty}$: forma indeterminata.
Riscrivendo in forma equivalente l'espressione di cui si vuole calcolare il limite, si ottiene:
$\lim_{x\to-\infty}\frac{2\,x^2+1}{x^2+7\,x-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(2+\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{7}{x}-\frac{4}{x^2})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{7}{x}-\frac{4}{x^2}}=2$