Esercitazione 8 - Soluzioni

Francesco Davì

23 novembre 2012

Soluzioni esercizio 1

1. Si ha $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Dato che il versore $\hat{v}$ cercato ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{v}$ e che per definizione $|\hat{v}| = 1$, vale $\vec{v} = 2\sqrt{2}\,\hat{v}$ da cui segue che $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{2\sqrt{2}} = (\frac{2}{2\sqrt{2}}, \frac{-2}{2\sqrt{2}}) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

2. Si ha $|\vec{w}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$. Dato che il versore $\hat{w}$ cercato ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{w}$ e che per definizione $|\hat{w}| = 1$, vale $\vec{w} = 2\,\hat{w}$ da cui segue che $\hat{w} = \frac{\vec{w}}{2} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

3. La proiezione del vettore $\vec{v}$ sul vettore $\vec{w}$ è uguale a $|\vec{v}|\cos\varphi$ dove φ è l'angolo compreso tra i due vettori. Dato che vale sia $\vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}|\cos\varphi$ sia $\vec{v}\cdot\vec{w} = v_x w_x + v_y w_y$ si ha $|\vec{v}||\vec{w}|\cos\varphi = v_x w_x + v_y w_y$ da cui si ottiene $|\vec{v}|\cos\varphi = \frac{v_x w_x + v_y w_y}{|\vec{w}|} = \frac{2\sqrt{3}+(-2)1}{2} = \frac{2\sqrt{3}-2}{2} = \sqrt{3} - 1$.

4. La proiezione del vettore $\vec{w}$ sul vettore $\vec{v}$ è uguale a $|\vec{w}|\cos\varphi$ dove φ è l'angolo compreso tra i due vettori. Per quanto visto nel punto precedente si ottiene
$|\vec{w}|\cos\varphi = \frac{v_x w_x + v_y w_y}{|\vec{v}|} = \frac{2\sqrt{3}+(-2)1}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}-2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$.

5. Per quanto visto nei punti precedenti, si ha
$\cos\varphi = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(2\sqrt{2})\,(2)} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

6. Dato che $\vec{v}\wedge\vec{w} = (v_y w_z - v_z w_y, v_z w_x - v_x w_z, v_x w_y - v_y w_x)$, si considerano i vettori in $\mathbb{R}^3$ ponendo $\vec{v} = (2, -2, 0)$ e $\vec{w} = (\sqrt{3}, 1, 0)$ e si ottiene $\vec{v}\wedge\vec{w} = ((-2)(0) - (0)(1), (0)(\sqrt{3}) - (2)(0), (2)(1) - (-2)(\sqrt{3})) = (0, 0, 2(1 + \sqrt{3}))$.

7. L'area A del parallelogramma di vertici $\vec{0}, \vec{v}, \vec{w}$ e $\vec{v} + \vec{w}$ è uguale a $|\vec{v}||\vec{w}|\sin\varphi$ che coincide con la lunghezza del prodotto vettoriale $\vec{v}\wedge\vec{w}$: $A = |\vec{v}\wedge\vec{w}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (2(1+\sqrt{3}))^2} = 2(1+\sqrt{3})$.

Soluzioni esercizio 2

Dato che $\vec{v} \wedge \vec{w} = (v_y w_z - v_z w_y, v_z w_x - v_x w_z, v_x w_y - v_y w_x)$ e $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$, il vettore $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$ dovrà essere tale che sia soddisfatto il seguente sistema

$$\begin{cases} -w_y = -1 \\ w_x - w_z = 2 \\ w_y = 1 \\ w_x + w_z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_x = 2 + w_z \\ w_y = 1 \\ 2 + w_z + w_z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_x = 3 \\ w_y = 1 \\ w_z = 1 \end{cases}$$

Quindi si ottiene $\vec{w} = (3, 1, 1)$.

1. La proiezione del vettore $\vec{v}$ sul vettore $\vec{w}$ è uguale a $|\vec{v}| \cos\varphi$ dove φ è l'angolo compreso tra i due vettori. Dato che $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}| \cos\varphi$ e che $\vec{v} \cdot \vec{w} = 4$ e $|\vec{w}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{11}$ si ha
   $|\vec{v}| \cos\varphi = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{4}{\sqrt{11}}$.

2. La proiezione del vettore $\vec{w}$ sul vettore $\vec{v}$ è uguale a $|\vec{w}| \cos\varphi$ dove φ è l'angolo compreso tra i due vettori. Dato che $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}| \cos\varphi$ e che $\vec{v} \cdot \vec{w} = 4$ e $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ si ha
   $|\vec{v}| \cos\varphi = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{4}{\sqrt{2}}$.

3. Per quanto visto nei punti precedenti, si ha
   $\cos\varphi = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|} = \frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{11}} = \frac{4}{\sqrt{22}}$.

4. L'area A_1 del parallelogramma di vertici $\vec{0}, \vec{v}, \vec{w}$ e $\vec{v} + \vec{w}$ è uguale a $|\vec{v}||\vec{w}| \sin\varphi$ che coincide con la lunghezza del prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{w}$:
   $A_1 = |\vec{v} \wedge \vec{w}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$.

5. Il versore $\hat{v} = (\hat{v}_x, \hat{v}_y, \hat{v}_z)$ deve soddisfare le seguenti condizioni:
   - $|\hat{v}| = 1$ (per la definizione di versore) $\Rightarrow \sqrt{(\hat{v}_x)^2 + (\hat{v}_y)^2 + (\hat{v}_z)^2} = 1 \Rightarrow (\hat{v}_x)^2 + (\hat{v}_y)^2 + (\hat{v}_z)^2 = 1$;
   - $\hat{v} \cdot \vec{v} = 0$ (in quanto i due vettori devono essere ortogonali) $\Rightarrow \hat{v}_x + \hat{v}_z = 0$;
   - $\hat{v}_z = 0$ (dato che il versore $\hat{v}$ giace sul piano xy).

   Bisogna quindi risolvere il seguente sistema
   $$\begin{cases} (\hat{v}_x)^2 + (\hat{v}_y)^2 + (\hat{v}_z)^2 = 1 \\ \hat{v}_x + \hat{v}_z = 0 \\ \hat{v}_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\hat{v}_y)^2 = 1 \\ \hat{v}_x = 0 \\ \hat{v}_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{v}_y = \pm 1 \\ \hat{v}_x = 0 \\ \hat{v}_z = 0 \end{cases}$$
   Esistono due versori che soddisfano i vincoli imposti: $\hat{v}_1 = (0, 1, 0)$ oppure $\hat{v}_2 = (0, -1, 0)$.

6. Il versore $\hat{w} = (\hat{w}_x, \hat{w}_y, \hat{w}_z)$ deve soddisfare le seguenti condizioni:
   - $|\hat{w}| = 1$ (per la definizione di versore) $\Rightarrow \sqrt{(\hat{w}_x)^2 + (\hat{w}_y)^2 + (\hat{w}_z)^2} = 1 \Rightarrow (\hat{w}_x)^2 + (\hat{w}_y)^2 + (\hat{w}_z)^2 = 1$;
   - $\hat{w} \cdot \vec{w} = 0$ (in quanto i due vettori devono essere ortogonali) $\Rightarrow 3\hat{w}_x + \hat{w}_y + \hat{w}_z = 0$;

- $\hat{w}_z = 0$ (dato che il versore $\hat{w}$ giace sul piano xy).
Bisogna quindi risolvere il seguente sistema
$\begin{cases} (\hat{w}_x)^2 + (\hat{w}_y)^2 + (\hat{w}_z)^2 = 1 \\ 3\hat{w}_x + \hat{w}_y + \hat{w}_z = 0 \\ \hat{w}_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\hat{w}_x)^2 + (-3\hat{w}_x)^2 = 1 \\ \hat{w}_y = -3\hat{w}_x \\ \hat{w}_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10(\hat{w}_x)^2 = 1 \\ \hat{w}_y = -3\hat{w}_x \\ \hat{w}_z = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} \hat{w}_x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \hat{w}_y = \mp\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \hat{w}_z = 0 \end{cases}$
Esistono due versori che soddisfano i vincoli imposti: $\hat{w}_1 = (\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}, 0)$ oppure $\hat{w}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}, 0)$.

7. Si ha $\vec{v}+\vec{w} = (v_x+w_x, v_y+w_y, v_z+w_z) = (1+3, 0+1, 1+1) = (4, 1, 2)$. Allora $\vec{v}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = (1)(4) + (0)(1) + (1)(2) = 6$.

8. L'area A_2 del parallelogramma di vertici $\vec{0}, \vec{v}, -\vec{w}$ e $\vec{v} - \vec{w}$ è uguale a $|\vec{v}||-\vec{w}|\sin\varphi$ che coincide con la lunghezza del prodotto vettoriale $\vec{v}\wedge(-\vec{w})$, dato che $|-\vec{w}| = |\vec{w}|$ si ha
$A_2 = |\vec{v}\wedge(-\vec{w})| = |\vec{v}\wedge\vec{w}| = \sqrt{6}$ (come calcolato al punto 4).

Soluzioni esercizio 3

L'equazione di una retta passante per due generici punti di coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) con $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$ è $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, quindi la retta r cercata ha equazione
$\frac{x-(-1)}{2-(-1)} = \frac{y-(-1)}{8-(-1)} \Rightarrow \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{9}$.

1. Il vettore $\vec{v} = (a, b)$ con $a = x_2 - x_1$ e $b = y_2 - y_1$ individua la direzione di una generica retta $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Quindi il vettore $\vec{v} = (3, 9)$ individua la direzione della retta r.

2. La direzione ortogonale a r è individuata dal vettore ortogonale a $\vec{v}$: $\vec{w} = (-9, 3)$ (oppure $\vec{w} = (9, -3)$).

3. L'equazione di una retta con direzione individuata dal vettore $\vec{w} = (a, b)$ e passante per un generico punto di coordinate (x_0, y_0) è $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$, quindi la retta s cercata ha equazione
$\frac{x-3}{-9} = \frac{y-(-1)}{3} \Rightarrow \frac{3-x}{9} = \frac{y+1}{3}$

4. Per calcolare le coordinate del punto Q bisogna risolvere il sistema contenente la retta r e la retta s: $\begin{cases} \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{9} \\ \frac{3-x}{9} = \frac{y+1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+1 = 3(x+1) \\ y+1 = \frac{3-x}{3} \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3-x}{3} = 3(x+1) \\ y = 3(x+1) - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - x = 9(x+1) \\ y = 3x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x = -6 \\ y = 3x+2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5} \\ y = -\frac{9}{5} + 2 = \frac{1}{5} \end{cases}$$
Quindi $Q = (-\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$.

5. La distanza tra due generici punti di coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) è uguale a $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Allora la distanza tra i punti P e Q è: $\sqrt{(3 - (-\frac{3}{5}))^2 + (-1 - \frac{1}{5})^2} = \sqrt{(\frac{18}{5})^2 + (-\frac{6}{5})^2} = \sqrt{\frac{324}{25} + \frac{36}{25}} = \sqrt{\frac{360}{25}} = \frac{6}{5}\sqrt{10}$.

   La distanza tra un punto di coordinate (x_0, y_0) e una retta di equazione $Ax+By+C = 0$ è uguale a $\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Allora la distanza tra il punto $P = (3, -1)$ e la retta $r : \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{9} \Rightarrow 3(x+1) = y+1 \Rightarrow 3x-y+2 = 0$ è:
   $\frac{|3(3)+(-1)(-1)+2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{|9+1+2|}{\sqrt{9+1}} = \frac{12}{\sqrt{10}}$.
   È immediato notare che $\frac{12}{\sqrt{10}} = \frac{12}{\sqrt{10}}\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{12\sqrt{10}}{10} = \frac{6}{5}\sqrt{10}$ che coincide con la distanza tra i punti P e Q calcolata nel punto precedente.