Esercitazione 13 - Soluzioni

Francesco Davì

8 gennaio 2013

Soluzioni esercizio 1

1. Si ha

   - $\cos x = \cos(0) + (-\sin(0))x + \frac{1}{2}(-\cos(0))x^2 + \ldots = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \ldots$
   - $\sin x = \sin(0) + \cos(0)x + \frac{1}{2}(-\sin(0))x^2 + \ldots = x + \ldots$
   - $\ln(1+3x) = \ln(1+3(0)) + \frac{3}{1+3(0)}x + \ldots = 3x + \ldots$

   da cui segue che

   $$\lim_{x\to 0} \frac{(2x - \sin x)\ln(1+3x)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{(2x - x + \ldots)(3x+\ldots)}{1-(1-\frac{1}{2}x^2+\ldots)} =$$
   $$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+\ldots}{\frac{1}{2}x^2+\ldots} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

   (Con la scrittura "…" indichiamo i termini successivi della formula di Taylor. Per la definizione della formula di Taylor, tali termini sono di grado superiore a quelli che sono stati calcolati esplicitamente e per tale motivo tendono a zero per $x \to 0$)

2. Si ha

   - $\sin x = \sin(0) + \cos(0)x + \frac{1}{2}(-\sin(0))x^2 + \ldots = x + \ldots$
   - $e^x = e^0 + e^0 x + \frac{1}{2}e^0 x^2 + \ldots = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots$

   da cui si ottiene che

   $\sin^4 x = x^4 + \ldots$
   e
   $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \ldots$

   Allora

   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} + (x^2+1)(x^4-1)}{(1-x^4)\sin^4 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \ldots + x^6 + x^4 - x^2 - 1}{(1-x^4)x^4} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2}x^4 + x^6 + \ldots}{(1-x^4)x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2}x^4 + x^6 + \ldots}{(1-x^4)x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2} + x^2 + \ldots}{1-x^4} = \frac{3}{2}$$

(Bisogna notare che è possibile effettuare la semplificazione del termine x^4 nell'ultimo passaggio in quanto tutti i termini non esplicitamente calcolati, indicati con "...", contengono tale termine, in quanto successivi sviluppi della formula di Taylor delle funzioni in esame)

3. Si ha

   - $\ln(1-x) = \ln(1-0) + (-\frac{1}{1-0})x + \frac{1}{2}(-\frac{1}{(1-0)^2})x^2 + \ldots = -x - \frac{1}{2}x^2 + \ldots$
     (in quato per $f(x) = \ln(1-x)$ vale $f'(x) = -\frac{1}{1-x}$ e $f''(x) = -(-(-\frac{1}{(1-x)^2})) = -\frac{1}{(1-x)^2}$)
   - $\sin x = \sin(0) + \cos(0)x + \frac{1}{2}(-\sin(0))x^2 + \ldots = x + \ldots$

   da cui si ottiene che

   $\sin^2 x = x^2 + \ldots$
   e
   $\sin^3 x = x^3 + \ldots$

   Allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1-x) + \sin^2 x + \frac{1}{2}x^3}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(-x - \frac{1}{2}x^2 + \ldots) + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \ldots}{x^3 + \ldots} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{-x^2 - \frac{1}{2}x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \ldots}{x^3 + \ldots} = \lim_{x\to 0} \frac{0 + \ldots}{x^3 + \ldots} = 0$$

4. Si ha

   - $\mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}\,(0) + \frac{1}{\cos^2(0)}x + \ldots = x + \ldots$
     da cui segue
     $\mathrm{tg}\, x^4 = x^4 + \ldots$
   - $\ln(1+x) = \ln(1+0) + \frac{1}{1+0}x + \frac{1}{2}(-\frac{1}{(1+0)^2})x^2 + \frac{1}{6}\frac{2}{(1+0)^3}x^3 + \ldots = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots$
     (in quanto per $f(x) = \ln(1+x)$ vale $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ e $f'''(x) = -(-2\frac{1}{(1+x)^3}) = \frac{2}{(1+x)^3}$)
   - $\cos x = \cos(0) + (-\sin(0))x + \frac{1}{2}(-\cos(0))x^2 + \frac{1}{6}\sin(0)x^3 + \frac{1}{24}\cos(0)x^4 + \ldots = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots$
     da cui si ottiene che
     $\cos^2 x = 1 + \frac{1}{4}x^4 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \ldots = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \ldots$

   Allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+x) - 1 + \cos^2 x + \frac{1}{2}x^3}{\operatorname{tg}(x^4)} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots) - 1 + 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \dots + \frac{1}{2}x^3}{x^4 + \dots} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \dots}{x^4 + \dots} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3}x^4 + \dots}{x^4 + \dots} = \frac{2}{3}$$

5. Si ha

   - $\cos x = \cos(0) + (-\sin(0))x + \frac{1}{2}(-\cos(0))x^2 + \dots = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots$
   - $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(0) + \frac{1}{\cos^2(0)}x + \dots = x + \dots$
     da cui segue
     $\operatorname{tg}^2 x = x^2 + \dots$
   - $\ln(1+x) = \ln(1+0) + \frac{1}{1+0}x + \dots = x + \dots$
     (in quanto per $f(x) = \ln(1+x)$ vale $f'(x) = \frac{1}{1+x}$)
   - $\sin x = \sin(0) + \cos(0)x + \frac{1}{2}(-\sin(0))x^2 + \dots = x + \dots$
     da cui segue
     $\sin^2 x = x^2 + \dots$

   Si ottiene quindi

   $\ln(1 + 2\operatorname{tg}^2 x) = 2\operatorname{tg}^2 x + \dots = 2x^2 + \dots$
   e
   $\sin^2(\sqrt{3}x) = (\sqrt{3}x)^2 + \dots = 3x^2 + \dots$

   Allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + 2\operatorname{tg}^2 x) - \sin^2(\sqrt{3}x)}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - 3x^2 + \dots}{1 - (1 - \frac{1}{2}x^2)} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + \dots}{\frac{1}{2}x^2} = -2$$