Esercitazione 2 - Soluzioni

Francesco Davì

12 ottobre 2012

Esercizio 1

(a) Si deve avere $2+|3\,x| \neq 0 \Rightarrow |3\,x| \neq -2$, che è verificato $\forall x \in \mathbb{R}$, in quanto il valore del modulo di un'espressione non è mai negativo. L'espressione al numeratore $|2-3\,x|$ è sempre positiva ma deve valere $2-3\,x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{2}{3}$, in quanto la disequazione è strettamente positiva. La soluzione dell'esercizio allora coincide con gli intervalli in cui l'espressione al denominatore è positiva (escludendo il valore $\frac{2}{3}$): per risolvere $2-|3\,x| > 0 \Rightarrow |3\,x| < 2$, bisogna determinare l'unione delle soluzioni dei due sistemi di disequazioni $\begin{cases} 3\,x \geq 0 \\ 3\,x < 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3\,x < 0 \\ -3\,x < 2 \end{cases}$. Il primo sistema è equivalente a $\begin{cases} x \geq 0 \\ x < \frac{2}{3} \end{cases}$ la cui soluzione è $0 \leq x < \frac{2}{3}$. Il secondo sistema è equivalente a $\begin{cases} x < 0 \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases}$ che ha come soluzione $-\frac{2}{3} < x < 0$. Allora l'unione delle soluzioni dei due sistemi, e quindi la soluzione dell'esercizio, è uguale a $-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$.

(b) Si deve avere $2-|3\,x| \neq 0 \Rightarrow |3\,x| \neq 2 \Rightarrow x \neq \pm\frac{2}{3}$. L'espressione al numeratore $|4-3\,x|$ è sempre positiva ma deve valere $4-3\,x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{4}{3}$, in quanto la disequazione è strettamente positiva. La soluzione dell'esercizio allora coincide con gli intervalli in cui l'espressione al denominatore è negativa (escludendo il valore $\frac{4}{3}$): per risolvere $2-|3\,x| < 0 \Rightarrow |3\,x| > 2$, bisogna determinare l'unione delle soluzioni dei due sistemi di disequazioni $\begin{cases} 3\,x \geq 0 \\ 3\,x > 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3\,x < 0 \\ -3\,x > 2 \end{cases}$. Il primo sistema è equivalente a $\begin{cases} x \geq 0 \\ x > \frac{2}{3} \end{cases}$ la cui soluzione è $x > \frac{2}{3}$. Il secondo sistema è equivalente a $\begin{cases} x < 0 \\ x < -\frac{2}{3} \end{cases}$ che ha come soluzione $x < -\frac{2}{3}$. Allora l'unione delle soluzioni dei due sistemi, e quindi la soluzione dell'esercizio, è uguale a $x < -\frac{2}{3}$ oppure $\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}$ oppure $x > \frac{4}{3}$.

(c) Dato che $x^2-1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \leq -1$ oppure $x \geq 1$ e che $3-2\,x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}$, si può notare che nell'intervallo $x \leq -1$ oppure

$1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ entrambe le espressioni $x^2 - 1$ e $3 - 2\,x$ sono positive. Allora per risolvere l'esercizio è sufficiente determinare l'unione delle soluzioni dei tre sistemi di disequazioni $\begin{cases} x \leq -1 \text{ oppure } 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ x^2 - 2\,x - 3 < 0 \end{cases}$, $\begin{cases} -1 < x < 1 \\ -x^2 - 2\,x - 1 < 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x^2 + 2\,x - 9 < 0 \end{cases}$. Per l'equazione $x^2 - 2\,x - 3 = 0$ vale $a = 1 > 0$ e $\Delta = 16 > 0$. Le radici di tale equazione sono $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$. Il primo sistema è allora equivalente a $\begin{cases} x \leq -1 \text{ oppure } 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ -1 < x < 3 \end{cases}$ la cui soluzione è $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$. Per l'equazione $-x^2 - 2\,x - 1 = 0$ vale $a = -1 < 0$ e $\Delta = 0$. Le radici di tale equazione sono $x_1 = x_2 = -1$. Il secondo sistema è allora equivalente a $\begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$ la cui soluzione è $-1 < x < 1$. Per l'equazione $x^2 + 2\,x - 9 = 0$ vale $a = 1 > 0$ e $\Delta = 40 > 0$. Le radici di tale equazione sono $x_1 = -1 - \sqrt{10}$ e $x_2 = -1 + \sqrt{10}$. Il terzo sistema è allora equivalente a $\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ -1 - \sqrt{10} < x < -1 + \sqrt{10} \end{cases}$ la cui soluzione è $\frac{3}{2} < x < -1 + \sqrt{10}$. Allora l'unione delle soluzioni dei tre sistemi, e quindi la soluzione dell'esercizio, è: $1 < x < -1 + \sqrt{10}$.

(d) Si ottiene $2^x - \frac{2^x}{2} < 2^3 \Rightarrow \frac{2^x}{2} < 2^3 \Rightarrow 2^{x-1} < 2^3 \Rightarrow x - 1 < 3$ (dato che la base dell'esponenziale è maggiore di 1) $\Rightarrow x < 4$.

(e) Si ottiene $2^x \cdot \frac{1}{3^x} < \frac{3^3}{2^3} \Rightarrow (\frac{2}{3})^x < (\frac{3}{2})^3 \Rightarrow (\frac{2}{3})^x < (\frac{2}{3})^{-3} \Rightarrow x > -3$ (dato che la base dell'esponenziale è minore di 1).

(f) Si ottiene $3 \cdot 3^x + 2 \cdot 3^2 \cdot 3^{-x} > 29 \Rightarrow 3 \cdot 3^x + 18 \cdot 3^{-x} > 29$. Ponendo $y = 3^x$ (quindi vale $y > 0$) si trova $3\,y + \frac{18}{y} > 29 \Rightarrow 3\,y^2 - 29\,y + 18 > 0$. Per l'equazione $3\,y^2 - 29\,y + 18 = 0$ vale $a = 3 > 0$ e $\Delta = 625 > 0$. Le radici di tale equazione sono $x_1 = \frac{2}{3}$ e $x_2 = 9$. Allora la soluzione della disequazione è: $y < \frac{2}{3}$ oppure $y > 9$, da cui si ottiene $3^x < \frac{2}{3}$ oppure $3^x > 9 \Rightarrow x < \log_3 \frac{2}{3}$ oppure $x > \log_3 9 \Rightarrow x < \log_3 2 - 1$ oppure $x > 2$.

(g) Deve essere $x > 0$, in quanto la variabile x compare sotto il simbolo di radice quadrata. Si ottiene $2 \cdot 2^{\sqrt{x}} + \frac{2^2}{2^{\sqrt{x}}} \leq 17$. Ponendo $y = 2^{\sqrt{x}}$ (quindi vale $y > 0$) si trova $4\,y + \frac{4}{y} \leq 17 \Rightarrow 4\,y^2 - 17\,y + 4 \leq 0$. Per l'equazione $4\,y^2 - 17\,y + 4 = 0$ vale $a = 4 > 0$ e $\Delta = 225 > 0$. Le radici di tale equazione sono $x_1 = \frac{1}{4}$ e $x_2 = 4$. Allora la soluzione della disequazione è: $\frac{1}{4} \leq y \leq 4$, da cui si ottiene $\frac{1}{4} \leq 2^{\sqrt{x}} \leq 4 \Rightarrow 2^{-2} \leq 2^{\sqrt{x}} \leq 2^2 \Rightarrow -2 \leq \sqrt{x} \leq 2$. Dato che la condizione di esistenza è $x > 0$, che $\sqrt{x} \geq -2, \forall x > 0$ e che $\sqrt{x} \leq 2 \Rightarrow x \leq 4$, la soluzione è: $0 < x \leq 4$.

(h) Deve essere $x > 0$, in quanto la variabile x compare come argomento di un logaritmo. Si ottiene $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ (dato che $\forall a > 0, \log_a a = 1$) $\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2})^2 \Rightarrow x \leq (\frac{1}{2})^2$ (dato che la base del logaritmo è minore di 1). La soluzione è quindi: $0 < x \leq \frac{1}{4}$.

(i) Deve essere $x^2 - x > 0$. Le radici dell'equazione $x^2 - x = x\,(x-1) = 0$ sono $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$, la condizione di esistenza è quindi: $x < 0$ oppure $x > 1$. Si ottiene $\log_2 x^2 - x \geq \log_2 2 \Rightarrow x^2 - x \leq 2$ (dato che la base del logaritmo è maggiore di 1). Per l'equazione $x^2 - x - 2 = 0$ vale $a = 1 > 0$ e $\Delta = 9 > 0$. Le radici di tale equazione sono $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$. Allora la soluzione della disequazione è: $-1 \leq x \leq 2$, la cui intersezione con la condizione di esistenza rappresenta la soluzione dell'esercizio: $-1 \leq x < 0$ oppure $1 < x \leq 2$.

(j) Deve essere $6\,x - x^2 > 0$. Le radici dell'equazione $6\,x - x^2 = x\,(6-x) = 0$ sono $x_1 = 0$ e $x_2 = 6$, la condizione di esistenza è quindi: $0 < x < 6$. Si ottiene $\log_{\frac{1}{3}} 6\,x - x^2 < -2 \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} 6\,x - x^2 < \log_{\frac{1}{3}} (\frac{1}{3})^{-2} \Rightarrow 6\,x - x^2 > (\frac{1}{3})^{-2}$ (dato che la base del logaritmo è minore di 1) $\Rightarrow -x^2 + 6\,x - 9 > 0$. Per l'equazione $-x^2 + 6\,x - 9 = 0$ vale $a = -1 < 0$ e $\Delta = 0$. Allora la soluzione della disequazione è: $\nexists x \in \mathbb{R}$, che rappresenta anche la soluzione dell'esercizio (in quanto l'intersezione fra $\nexists x \in \mathbb{R}$, che corrisponde all'insieme vuoto, e la condizione di esistenza è uguale all'insieme vuoto).

(k) Deve essere $x^2 - 4\,x + 4 > 0$. Per l'equazione $x^2 - 4\,x + 4 = 0$ vale $a = 1 > 0$ e $\Delta = 0$. Le radici di tale equazione sono $x_1 = x_2 = 2$. Quindi la condizione di esistenza è : $x \neq 2$. Si ottiene $\ln x^2 - 4\,x + 4 \leq \ln 1$ (dato che $\forall a > 0, \log_a 1 = 0$) $\Rightarrow x^2 - 4\,x + 4 \leq 1$ (dato che la base del logaritmo, il numero e, è maggiore di 1) $\Rightarrow x^2 - 4\,x + 3 \leq 0$. Per l'equazione $x^2 - 4\,x + 3 = 0$ vale $a = 1 > 0$ e $\Delta = 4 > 0$. Le radici di tale equazione sono $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$. Allora la soluzione della disequazione è: $1 \leq x \leq 3$, la cui intersezione con la condizione di esistenza rappresenta la soluzione dell'esercizio: $1 \leq x < 2$ oppure $2 < x \leq 3$.

Esercizio 2

(a) Bisogna risolvere il sistema contenente tutte le condizioni di esistenza:
$$\begin{cases} x + 1 > 0 & \text{(argomento del logaritmo)} \\ \ln(x+1) \geq 0 & \text{(argomento della radice quadrata)} \\ 2\,x^2 + 3\,x - 2 \neq 0 & \text{(denominatore)} \end{cases}$$
Si ottiene $\ln(x+1) \geq 0 \Rightarrow x + 1 \geq 1 \Rightarrow x \geq 0$. Inoltre, le radici dell'equazione $2\,x^2 + 3\,x - 2 = 0$ sono $x_1 = -2$ e $x_2 = \frac{1}{2}$, da cui segue

$$\begin{cases} x > -1 \\ x \geq 0 \\ x \neq -2 \text{ e } x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$ la cui soluzione è: $0 \leq x < \frac{1}{2}$ oppure $x > \frac{1}{2}$, che corrisponde al dominio della funzione assegnata: $D_f = \{x : x \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)\}$.

(b) Bisogna risolvere il sistema contenente tutte le condizioni di esistenza:

$$\begin{cases} x + 1 > 0 & \text{(argomento del logaritmo)} \\ \frac{\ln(x+1)}{2\,x^2+3\,x-2} \geq 0 & \text{(argomento della radice quadrata)} \\ 2\,x^2 + 3\,x - 2 \neq 0 & \text{(denominatore)} \end{cases}$$

Per risolvere $\frac{\ln(x+1)}{2\,x^2+3\,x-2} \geq 0$ bisogna considerare i due sistemi $\begin{cases} \ln(x+1) \geq 0 \\ 2\,x^2 + 3\,x - 2 > 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} \ln(x+1) \leq 0 \\ 2\,x^2 + 3\,x - 2 < 0 \end{cases}$. Si ottiene $\ln(x+1) \geq 0 \Rightarrow x + 1 \geq 1$ (dato che $\forall a > 0, \log_a 1 = 0$ e che la base del logaritmo, il numero e, è maggiore di 1). Per l'equazione $2\,x^2 + 3\,x - 2 = 0$ vale $a = 2 > 0$ e $\Delta = 25 > 0$. Le radici di tale equazione sono $x_1 = -2$ e $x_2 = \frac{1}{2}$. Il primo sistema è allora equivalente a $\begin{cases} x \geq 0 \\ x < -2 \text{ oppure } x > \frac{1}{2} \end{cases}$ la cui soluzione è: $x > \frac{1}{2}$. Il secondo sistema è equivalente a $\begin{cases} x \leq 0 \\ -2 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$ la cui soluzione è $-2 < x \leq 0$. Allora l'unione delle soluzioni dei due sistemi è: $-2 < x \leq 0$ oppure $x > \frac{1}{2}$. Il sistema iniziale diventa quindi $\begin{cases} x > -1 \\ -2 < x \leq 0 \text{ oppure } x > \frac{1}{2} \\ x \neq -2 \text{ e } x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$ la cui soluzione è: $-1 < x \leq 0$ oppure $x > \frac{1}{2}$, che corrisponde al dominio della funzione assegnata: $D_f = \{x : x \in (-1, 0] \cup (\frac{1}{2}, +\infty)\}$.

(c) Bisogna risolvere il sistema contenente tutte le condizioni di esistenza:

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 & \text{(argomento della radice quadrata)} \\ 1 + \sqrt{x+1} \neq 0 & \text{(denominatore)} \end{cases}$$

Si ottiene $1 + \sqrt{x+1} \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \neq -1$, che vale $\forall x \in \mathbb{R}$. Da ciò segue che la soluzione del sistema è: $x \geq -1$, che corrisponde al dominio della funzione assegnata: $D_f = \{x : x \in [-1, +\infty)\}$.

(d) Bisogna risolvere il sistema contenente tutte le condizioni di esistenza: $\begin{cases} x^3 \geq 0 & \text{(argomento della radice quadrata, } x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}) \\ e^x \neq 0 & \text{(denominatore)} \end{cases}$ da cui si ottiene $\begin{cases} x \geq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$ la cui soluzione è: $x \geq 0$, che corrisponde al dominio della funzione assegnata: $D_f = \{x : x \in [0, +\infty)\}$.

(e) Bisogna risolvere il sistema contenente tutte le condizioni di esistenza per $f(x) = e^{x^{\frac{1}{4}}} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{e^{\sqrt[4]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}$: $\begin{cases} x \geq 0 & \text{(argomento della radice di indice pari)} \\ \sqrt[3]{x^2} \neq 0 & \text{(denominatore)} \end{cases}$

Si ottiene $\sqrt[3]{x^2} \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$. Da ciò segue che la soluzione del sistema è: $x > 0$, che corrisponde al dominio della funzione assegnata: $D_f = \{x : x \in (0, +\infty)\}$.

(f) Bisogna risolvere il sistema contenente tutte le condizioni di esistenza: $\begin{cases} \frac{x^2}{x+1} > 0 & \text{(argomento del logaritmo)} \\ x+1 \neq 0 & \text{(denominatore)} \end{cases}$ Per risolvere $\frac{x^2}{x+1} > 0$ bisogna considerare i due sistemi $\begin{cases} x^2 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x^2 < 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$. Si ottiene $x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$ e $x^2 < 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$. Allora l'unione delle soluzioni dei sue sistemi è: $-1 < x < 0$ oppure $x > 0$, che coincide con la soluzione del sistema iniziale e quindi con il dominio della funzione assegnata: $D_f = \{x : x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)\}$.