Esercitazione 12 - Soluzioni

Francesco Davì

21 dicembre 2012

Soluzioni esercizio 1

1. Si può notare che $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^8 x \, \mathrm{d}x = \int \sin x \sin^2 x \cos^8 x \, \mathrm{d}x =$
   $\displaystyle\int \sin x \,(1-\cos^2 x) \cos^8 x \, \mathrm{d}x = \int \sin x \,(\cos^8 x - \cos^{10} x) \, \mathrm{d}x.$
   È possibile allora effettuare un'integrazione per sostituzione:
   la sostituzione scelta è $u = \cos x$, in questo modo si ottiene
   $\mathrm{d}u = -\sin x \mathrm{d}x$.
   Si ha quindi:

   $$\int \sin^3 x \cos^8 x \, \mathrm{d}x = \int \sin x (\cos^8 x - \cos^{10} x) \, \mathrm{d}x = -\int (u^8 - u^{10}) \, \mathrm{d}u =$$
   $$-\int u^8 \, \mathrm{d}u + \int u^{10} \, \mathrm{d}u = -\frac{u^9}{9} + \frac{u^{11}}{11} + c = -\frac{\cos^9 x}{9} + \frac{\cos^{11} x}{11} + c, \text{ con}$$
   $c \in \mathbb{R}$.

2. Integrazione per sostituzione:
   la sostituzione scelta è $u = \sqrt[3]{3x+2}$ ma conviene scriverla come
   $u^3 = 3x + 2$ dato che in questo modo si ottiene
   $3u^2 \mathrm{d}u = 3\mathrm{d}x \Rightarrow u^2 \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$.
   Inoltre possiamo notare che vale $u^3 = 3x + 2 \Rightarrow x = \frac{u^3-2}{3}$.
   Si ha quindi:
   $$\int_{-\frac{1}{3}}^{2} \frac{x}{\sqrt[3]{3x+2}} \, \mathrm{d}x = \int_{\sqrt[3]{3(-\frac{1}{3})+2}}^{\sqrt[3]{3(2)+2}} \frac{u^3-2}{3} \frac{1}{u} u^2 \, \mathrm{d}u = \frac{1}{3} \int_1^2 u^4 - 2u \, \mathrm{d}u =$$
   $$\frac{1}{3}\left(\frac{u^5}{5} - 2\frac{u^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{u^5}{5} - u^2\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{32}{5} - 4\right) - \left(\frac{1}{5} - 1\right)\right) =$$
   $$\frac{1}{3}\left(\frac{12}{5} + \frac{4}{5}\right) = \frac{16}{15}.$$

   È possibile non effettuare la sostituzione degli estremi dell'integrale, purché si segnali il fatto che gli estremi sono relativi alla variabile x e si effettui la sostituzione inversa prima di calcolare la primitiva negli estremi. Si ha

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{2} \frac{x}{\sqrt[3]{3x+2}}\,\mathrm{d}x = \int_{x=-\frac{1}{3}}^{x=2} \frac{u^3-2}{3}\frac{1}{u}u^2\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int_{x=-\frac{1}{3}}^{x=2} u^4 - 2u\,\mathrm{d}u =$$
$$\frac{1}{3}\left(\frac{u^5}{5} - 2\frac{u^2}{2}\right)\Big|_{x=-\frac{1}{3}}^{x=2} = \frac{1}{3}\left(\frac{u^5}{5} - u^2\right)\Big|_{x=-\frac{1}{3}}^{x=2} = \frac{1}{3}\left(\frac{(\sqrt[3]{3x+2})^5}{5} - (\sqrt[3]{3x+2})^2\right)\Big|_{x=-\frac{1}{3}}^{x=2} =$$
$$\frac{1}{3}\left(\left(\frac{32}{5} - 4\right) - \left(\frac{1}{5} - 1\right)\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{12}{5} + \frac{4}{5}\right) = \frac{16}{15}.$$

3. La funzione razionale $\frac{1}{x^3-2x^2+x}$ è regolare (in quanto il grado del numeratore è inferiore al grado del denominatore) e quindi può essere scritta come somma di elementi semplici, attraverso il metodo dei coefficienti indeterminati:
$\frac{1}{x^3-2x^2+x} = \frac{1}{x(x^2-2x+1)} = \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2+B(x)(x-1)+C(x)}{x(x-1)^2} = \frac{Ax^2-2Ax+A+Bx^2-Bx+Cx}{x^3-2x^2+x} = \frac{(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A}{x^3-2x^2+x}$.
Dato che deve essere $1 = (A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A$ (in quanto i numeratori della prima e dell'ultima espressione devono coincidere), devono valere le seguenti condizioni
$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B+C=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-1 \\ C=1 \\ A=1 \end{cases}$$
Quindi si ha
$\frac{1}{x^3-2x^2+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$
da cui segue che
$$\int \frac{1}{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x-1} + c, \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

4. La funzione razionale $\frac{x^2+3x+2}{x^3+x}$ è regolare (in quanto il grado del numeratore è inferiore al grado del denominatore) e quindi può essere scritta come somma di elementi semplici, attraverso il metodo dei coefficienti indeterminati:
$\frac{x^2+3x+2}{x^3+x} = \frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x)}{x(x^2+1)} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x^3+x} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x^3+x}$.
Dato che deve essere $x^2+3x+2 = (A+B)x^2 + Cx + A$, devono valere le seguenti condizioni
$$\begin{cases} A+B=1 \\ C=3 \\ A=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-1 \\ C=3 \\ A=2 \end{cases}$$
Quindi si ha
$\frac{x^2+3x+2}{x^3+x} = \frac{2}{x} + \frac{-x+3}{x^2+1}$
da cui segue che

$\displaystyle\int \frac{x^2+3x+2}{x^3+x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x} - \frac{x-3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x-3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$
$\displaystyle 2\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$
$\displaystyle 2\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$
$\displaystyle 2\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 3\,\mathrm{arctg}(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$.

5. La funzione razionale $\frac{1}{x^3+1}$ è regolare (in quanto il grado del numeratore è inferiore al grado del denominatore) e quindi può essere scritta come somma di elementi semplici, attraverso il metodo dei coefficienti indeterminati (in particolare, è possibile notare che $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$, dove l'espressione x^2-x+1 non è ulteriormente fattorizzabile):
$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{Ax^2-Ax+A+Bx^2+Bx+Cx+C}{x^3+1} = \frac{(A+B)x^2+(-A+B+C)x+A+C}{x^3+1}$.
Dato che deve essere $1 = (A+B)x^2+(-A+B+C)x+A+C$, devono valere le seguenti condizioni

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ -A-A+1-A=0 \\ C=1-A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-\frac{1}{3} \\ A=\frac{1}{3} \\ C=\frac{2}{3} \end{cases}$$

Quindi si ha
$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}$
da cui segue che
$\displaystyle\int \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3(x+1)} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3(x+1)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x =$
$\displaystyle\frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x.$
Per completare l'esercizio, bisogna quindi risolvere $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$.
È possibile utilizzare la seguente formula

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\,\mathrm{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} \quad (1)$$

oppure si può manipolare $\frac{x-2}{x^2-x+1}$ per ottenere una espressione di cui è possibile calcolare l'integrale indefinito più agevolmente[1]. Ad esempio:
$\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x-2}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x-2}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x =$

[1] Si vedano anche le formule illustrate negli esempi 13 e 15 a pagina 128 (§13.1) degli appunti del corso.

$$\int \frac{x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x-\frac{1}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-\frac{3}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{x-\frac{1}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x.$$

Per risolvere i due integrali così ottenuti si può utilizzare l'integrazione per sostituzione, ponendo $u = x - \frac{1}{2}$ da cui segue $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$. Si ha quindi:

- per il primo integrale

$$\int \frac{x-\frac{1}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u.$$

Applicando nuovamente l'integrazione per sostituzione, questa volta con $t = u^2 + \frac{3}{4}$ si ha $\mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u$ e si ottiene:

$$\int \frac{x-\frac{1}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} =$$

$$\frac{1}{2}\ln t + c = \frac{1}{2}\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right) + c = \frac{1}{2}\ln\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right) + c =$$

$\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+c$, con $c \in \mathbb{R}$;

(si sarebbe potuta adottare anche semplicemente una sola sostituzione: $z = (x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ con $\mathrm{d}z = 2(x-\frac{1}{2})\mathrm{d}x$)

- per il secondo integrale

$$\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u.$$

Si può notare che l'integrale è del tipo $\int \frac{1}{u^2+a^2}\mathrm{d}u$ (con $a = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$) che è uguale a $\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + c$, con $c \in \mathbb{R}$.

Infatti, applicando l'integrazione per sostituzione con $t = \frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2u}{\sqrt{3}}$ da cui si ha $\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}u$, si ottiene:

$$\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{u^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\,\mathrm{d}u =$$

$$\frac{1}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\int \frac{1}{\frac{u^2}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\int \frac{1}{\left(\frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}u =$$

$$\frac{1}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\int \frac{1}{(\frac{2u}{\sqrt{3}})^2+1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}(t) + c = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + c =$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\right) + c = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c, \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

Riepilogando, si ha:

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \; - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \; - \frac{1}{3}\left(\int \frac{x-\frac{1}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right) + c =$$

$$\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c, \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

(Chiaramente, si può utilizzare direttamente la formula (1), la difficoltà in questo caso consiste nella memorizzazione e corretta applicazione della formula:

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \; - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{2(-2)-(1)(-1)}{\sqrt{4(1)-(-1)^2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+(-1)}{\sqrt{4(1)-(-1)^2}}\right)\right) + c =$$

$$\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{3}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right) + c =$$

$$\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c, \text{ con } c \in \mathbb{R}.)$$