Esercitazione 7 - Soluzioni

Francesco Davì

16 novembre 2012

Esercizio 1

1) $f(x) = \sqrt{4 - x^4}$
L'argomento della radice quadrata deve essere maggiore o uguale a zero:
$4 - x^4 \geq 0 \Rightarrow x^4 \leq 4 \Rightarrow |x| \leq \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$
Equivalentemente:
$4 - x^4 \geq 0 \Rightarrow (2 - x^2)(2 + x^2) \geq 0$. Dato che $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $2 + x^2 \geq 0$, per risolvere la disequazione ottenuta è sufficiente risolvere $2 - x^2 \geq 0$ da cui si ottiene $x^2 \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$
Il dominio della funzione è quindi: $D_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

2) $f(x) = \log(18x^2 + 11x + 1)$
L'argomento della funzione logaritmo deve essere strettamente maggiore di zero:
$18x^2 + 11x + 1 > 0$
Le radici dell'equazione $18x^2 + 11x + 1 = 0$ sono $x = -\frac{1}{2}$ e $x = -\frac{1}{9}$. La funzione è definita negli intervalli esterni alle due soluzioni, il suo dominio è quindi: $D_f = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{9}, +\infty)$

Esercizio 2

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+\cos(x^4)}{x^4+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4(1+\frac{\cos(x^4)}{x^4})}{x^4(1+\frac{1}{x^4})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+0}{1+0}$
dato che $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4} = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x^4)}{x^4} = 0$ in quanto $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $-1 \leq \cos(x^4) \leq 1$.

2) $\lim_{x\to0}(1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0}(1 + 2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2} = e^2$
per il limite notevole $\lim_{x\to0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.
Equivalentemente:
$\lim_{x\to0}(1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0} e^{\ln(1+2x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+2x)} = e^{\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+2x)}{x}}$
Il limite può essere risolto attraverso il limite notevole $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$:
$e^{\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+2x)}{x}} = e^{\lim_{x\to0} 2\frac{\ln(1+2x)}{2x}} = e^2$

oppure utilizzando le regole di de l'Hôpital:
$e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+2x}2}{1}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{2}{1+2x}} = e^2$

Esercizio 3

$f : I \to J$ si dice iniettiva se $\forall x, y \in I, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
Allora la funzione $f(x) = 1+x^4$ non è iniettiva, in quanto $f(-1) = f(1) = 2$, esistono cioé due punti distinti in $[-2, 1]$ che hanno immagine uguale in $[1, 17]$.

Esercizio 4

1) $f(x) = e^{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$
$f'(x) = e^{\frac{x^2-1}{x^2+1}}(\frac{(2x)(x^2+1)-(x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2}) = e^{\frac{x^2-1}{x^2+1}}\frac{(2x)((x^2+1)-(x^2-1))}{(x^2+1)^2} = e^{\frac{x^2-1}{x^2+1}}\frac{(2x)(2)}{(x^2+1)^2} = e^{\frac{x^2-1}{x^2+1}}\frac{4x}{(x^2+1)^2}$

2) $f(x) = \arccos(1 + x^2)$
$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(1+x^2)^2}}(2x) = -\frac{2x}{\sqrt{(1-(1+x^2))(1+(1+x^2))}} = -\frac{2x}{\sqrt{-x^2(2+x^2)}}$

Esercizio 5

La funzione $f(x) = (2x^4 - 3x^3 - 3x - 2)\log(1+x^2)$ è definita per $1+x^2 > 0$, quindi $\forall x \in \mathbb{R}$. Il dominio della funzinoe è quindi $\mathbb{R}$ e ciò implica che la funzione è continua in particolare in $[-\frac{1}{2}, 2]$.
La derivata della funzione
$f'(x) = (8x^3 - 9x^2 - 3)\log(1 + x^2) + (2x^4 - 3x^3 - 3x - 2)\frac{1}{1+x^2}(2x)$
è definita per $1 + x^2 > 0$, quindi anche il dominio di $f'(x)$ è $\mathbb{R}$, da cui segue che la funzione $f(x)$ è derivabile in particolare in $(-\frac{1}{2}, 2)$.
Inoltre, si ha
$f(-\frac{1}{2}) = (2(\frac{1}{16}) - 3(-\frac{1}{8}) - 3(-\frac{1}{2}) - 2)\log(1 + \frac{1}{4}) = (\frac{2+6+24-32}{16})\log(\frac{5}{4}) = 0$
e
$f(2) = (32 - 24 - 6 - 2)\log(1 + 4) = 0$.
Allora dato che:
- $f(x)$ è continua in $[-\frac{1}{2}, 2]$
- $f(x)$ è derivabile in $(-\frac{1}{2}, 2)$
- $f(-\frac{1}{2}) = f(2)$

le ipotesi del teorema di Rolle sono soddisfatte e quindi è valida la sua tesi: $\exists c \in (-\frac{1}{2}, 2)$ tale che $f'(c) = 0$.

Esercizio 6

$f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$
Dominio: Deve essere $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$. Il dominio della funzione è quindi $D_f = \mathbb{R} \backslash \{-2\}$ o, equivalentemente, $D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.
Intersezioni con gli assi: Bisogna risolvere i due sistemi

$$1) \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x^2-1}{x+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{x^2-1}{x+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = \frac{x^2-1}{x+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

I punti di intersezione della funzione e degli assi cartesiani sono quindi: $(0, -\frac{1}{2}), (1, 0), (-1, 0)$.
Studio della derivata prima (punti stazionari, crescenza e decrescenza della funzione, massimi, minimi e flessi orizzontali):
$f'(x) = \frac{(2x)(x+2)-(x^2-1)(1)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+4x-x^2+1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$
Il dominio di $f'(x)$ è $\mathbb{R} \backslash \{-2\}$. Per stabilire gli intervalli in cui $f'(x)$ è positiva e quelli in cui è negativa, è sufficiente studiare il segno di $x^2 + 4x + 1$, dato che $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $(x+2)^2 \geq 0$.
Le radici di $x^2 + 4x + 1 = 0$ sono $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ e $x_2 = -2 + \sqrt{3}$, quindi $x^2 + 4x + 1 \geq 0 \Rightarrow (x \leq -2 - \sqrt{3})$ oppure $(x \geq -2 + \sqrt{3})$.
Si ottiene quindi il seguente schema:

x		$-2-\sqrt{3}$		-2		$-2+\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$n.d.$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$n.d.$	$\searrow$	min	$\nearrow$

(in cui si è evidenziato che $f(x)$ e $f'(x)$ non sono definite per $x = -2$).

Nei punti di ascissa $-2 - \sqrt{3}$ e $-2 + \sqrt{3}$ la derivata prima della funzione si annulla, tali punti sono quindi i punti stazionari della funzione. Dallo studio del segno della derivata in un intorno di questi punti segue che il punto di ascissa $-2 - \sqrt{3}$ è un punto di massimo per $f(x)$ mentre il punto di ascissa $-2 + \sqrt{3}$ è un punto di minimo per $f(x)$. Non esistono punti di flesso orizzontale. Per determinare i valori del massimo e del minimo della funzione, è sufficiente calcolare il valore della funzione nei punti stazionari corrispondenti. Dato che
$f(-2-\sqrt{3}) = \frac{(-2-\sqrt{3})^2-1}{-2-\sqrt{3}+2} = \frac{4+3+4\sqrt{3}-1}{-\sqrt{3}} = \frac{6+4\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{6\sqrt{3}+12}{3} = -(2\sqrt{3} + 4) = -2(\sqrt{3}+2) = 2(-2-\sqrt{3})$
e
$f(-2+\sqrt{3}) = \frac{(-2+\sqrt{3})^2-1}{-2+\sqrt{3}+2} = \frac{4+3-4\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} = \frac{6-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}-12}{3} = (2\sqrt{3}-4) = 2(\sqrt{3}-2) = 2(-2+\sqrt{3})$,
si ottiene che il punto di massimo della funzione è $(-2-\sqrt{3}, f(-2-\sqrt{3})) = (-2-\sqrt{3}, 2(-2-\sqrt{3}))$ mentre il punto di minimo della funzione è $(-2 +$

$\sqrt{3}, f(-2+\sqrt{3}) = (-2+\sqrt{3}, 2(-2+\sqrt{3}))$.
Studio della derivata seconda (concavità e convessità della funzione, flessi obliqui):
$f''(x) = \frac{(2x+4)((x+2)^2)-(x^2+4x+1)(2(x+2)(1))}{(x+2)^4} = \frac{2(x+2)((x+2)^2-(x^2+4x+1))}{(x+2)^4} =$
$\frac{2(x^2+4x+4-x^2-4x-1)}{(x+2)^3} = \frac{6}{(x+2)^3}$
Il dominio di $f''(x)$ è $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$. Per stabilire gli intervalli in cui $f''(x)$ è positiva e quelli in cui è negativa, è sufficiente studiare il segno di $(x+2)^3$ (dato che 6 è positivo).
$(x+2)^3 > 0 \Rightarrow x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$
Si ottiene quindi il seguente schema:

x		-2	
$f''(x)$	$-$	$n.d.$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$n.d.$	$\cup$

(in cui si è evidenziato che $f(x)$ e $f''(x)$ non sono definite per $x = -2$).

Non esistono valori di x per i quali la derivata seconda della funzione si annulli, non esistono quindi punti di flesso della funzione.
Asintoti: Bisogna studiare il comportamento della funzione nei punti in cui non è definita e negli estremi del dominio.
Per il punto $x = -2$ in cui la funzione non è definita, si ha
$\lim_{x\to-2^+} \frac{x^2-1}{x+2} = +\infty$
$\lim_{x\to-2^-} \frac{x^2-1}{x+2} = -\infty$
quindi la retta $x = -2$ è un asintoto verticale della funzione.
Per gli estremi del dominio, si ottiene
1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x(1+\frac{2}{x})} =$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x(1-\frac{1}{x^2})}{(1+\frac{2}{x})} = +\infty$
Siccome il limite della funzione per $x \to +\infty$ è uguale a $+\infty$, bisogna verificare se esiste un asintoto $y = ax + b$:
dato che
$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x(x+2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{2}{x})} =$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{(1-\frac{1}{x^2})}{(1+\frac{2}{x})} = 1$
e
$b = \lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x+2} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1-x(x+2)}{x+2} =$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1-x^2-2x}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1-2x}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(-\frac{1}{x}-2)}{x(1+\frac{2}{x})} =$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x}-2}{1+\frac{2}{x}} = -2$
la retta $y = x - 2$ è un asintoto obliquo della funzione per $x \to +\infty$.
2) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x(1+\frac{2}{x})} =$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x(1-\frac{1}{x^2})}{(1+\frac{2}{x})} = -\infty$
Siccome il limite della funzione per $x \to -\infty$ è uguale a $-\infty$, bisogna verificare se esiste un asintoto $y = ax + b$:
dato che
$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x(x+2)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{2}{x})} =$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{(1-\frac{1}{x^2})}{(1+\frac{2}{x})} = 1$
e
$b = \lim_{x\to-\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x+2} - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1-x(x+2)}{x+2} =$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1-x^2-2x}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1-2x}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(-\frac{1}{x}-2)}{x(1+\frac{2}{x})} =$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{-\frac{1}{x}-2}{1+\frac{2}{x}} = -2$
la retta $y = x - 2$ è un asintoto obliquo della funzione anche per $x \to -\infty$.
Dato che la funzione è illimitata, non esistono massimo e minimo assoluto, quindi il massimo e il minimo calcolati precedentemente sono relativi.
Grafico qualitativo della funzione: