Esercitazione 10 - Soluzioni

Francesco Davì

7 dicembre 2012

Soluzioni esercizio 1

1. $\det A = +3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$

   $3(-1(0) - 1(2)) = 3(-2) = -6.$

2. $\det A \neq 0$ quindi la matrice A è invertibile.
   La matrice dei cofattori di A è

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (-1(0) - 1(2)) & -(-1(0) - 1(0)) & (-1(2) - (-1)(0)) \\ -(0(0) - (0)2) & (3(0) - 0(0)) & -(3(2) - 0(0)) \\ (0(1) - 0(-1)) & -(3(1) - 0(-1)) & (3(-1) - 0(-1)) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

La matrice trasposta di $\widetilde{A}$ è quindi

$$\widetilde{A}^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

e la matrice inversa di A è uguale a

$$A^{-1} = \frac{\widetilde{A}^T}{\det A} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{-6} & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & \frac{-3}{-6} \\ \\ \frac{-2}{-6} & \frac{-6}{-6} & \frac{-3}{-6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Gli autovalori della matrice A sono i valori λ che risolvono

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0,$$

in cui

$$A - \lambda \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Il determinante della matrice $A - \lambda \mathbb{1}$ è uguale a
$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = (3-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)((-1-\lambda)(-\lambda)-1(2)) =$
$(3-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2)$.
Risolvendo

$$(3-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2) = 0,$$

si ottengono gli autovalori della matrice A:
$3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3$
$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = 1$.
I tre autovalori della matrice A sono quindi $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = 1$.
Per calcolare l'autovettore $\vec{v}_i = (v_1, v_2, v_3)$ corrispondente all'autovalore λ_i della matrice, bisogna risolvere

$$(A - \lambda_i \mathbb{1})\vec{v}_i = \vec{0}.$$

Per $\lambda_1 = 3$, si ha
$$A - \lambda_1 \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 3-3 & 0 & 0 \\ -1 & -1-3 & 1 \\ 0 & 2 & 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$
da cui si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero il sistema

$$\begin{cases} (0)v_1 + (0)v_2 + (0)v_3 = 0 \\ (-1)v_1 + (-4)v_2 + (1)v_3 = 0 \\ (0)v_1 + (2)v_2 + (-3)v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -v_1 - 4v_2 + v_3 = 0 \\ 2v_2 - 3v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v_1 = -4v_2 + v_3 \\ v_2 = \frac{3}{2}v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -4(\frac{3}{2}v_3) + v_3 \\ v_2 = \frac{3}{2}v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -5v_3 \\ v_2 = \frac{3}{2}v_3 \end{cases}$$

quindi, ponendo ad esempio $v_3 = 1$, si ottiene $\vec{v}_1 = (-5, \frac{3}{2}, 1)$.

Per $\lambda_2 = -2$, si ha

$$A - \lambda_2 \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 3-(-2) & 0 & 0 \\ -1 & -1-(-2) & 1 \\ 0 & 2 & 0-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero il sistema

$$\begin{cases} (5)v_1 + (0)v_2 + (0)v_3 = 0 \\ (-1)v_1 + (1)v_2 + (1)v_3 = 0 \\ (0)v_1 + (2)v_2 + (2)v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5v_1 = 0 \\ -v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ 2v_2 + 2v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = -v_3 \end{cases}$$

quindi, ponendo ad esempio $v_3 = 1$, si ottiene $\vec{v}_2 = (0, -1, 1)$.

Per $\lambda_3 = 1$, si ha

$$A - \lambda_3 \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 3-1 & 0 & 0 \\ -1 & -1-1 & 1 \\ 0 & 2 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero il sistema

$$\begin{cases} (2)v_1 + (0)v_2 + (0)v_3 = 0 \\ (-1)v_1 + (-2)v_2 + (1)v_3 = 0 \\ (0)v_1 + (2)v_2 + (-1)v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2v_1 = 0 \\ -v_1 - 2v_2 + v_3 = 0 \\ 2v_2 - v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_3 = 2v_2 \end{cases}$$

quindi, ponendo ad esempio $v_2 = 1$, si ottiene $\vec{v}_3 = (0, 1, 2)$.

4. Gli autovalori della matrice A^{-1} sono i valori λ che risolvono

$$\det(A^{-1} - \lambda \mathbb{1}) = 0,$$

in cui

$$A^{-1} - \lambda \mathbb{1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Il determinante della matrice $A^{-1} - \lambda \mathbb{1}$ è uguale a
$\det(A{-}1{-}\lambda\mathbb{1}) = (\frac{1}{3}{-}\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = (\frac{1}{3}{-}\lambda)((-\lambda)(\frac{1}{2}{-}\lambda){-}\frac{1}{2}(1)) =$
$(\frac{1}{3} - \lambda)(\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2})$.
Risolvendo

$$(\frac{1}{3} - \lambda)(\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}) = 0,$$

si ottengono gli autovalori della matrice A^{-1}:
$\frac{1}{3} - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{3}$
$\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \lambda_{2,3} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = \frac{-1 \pm \frac{3}{2}}{2} \Rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{2}$ e $\lambda_3 = 1$.
I tre autovalori della matrice A^{-1} sono quindi $\lambda_1 = \frac{1}{3}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ e $\lambda_3 = 1$.
Per calcolare l'autovettore $\vec{v}_i = (v_1, v_2, v_3)$ corrispondente all'autovalore λ_i della matrice, bisogna risolvere

$$(A^{-1} - \lambda_i \mathbb{1})\vec{v}_i = \vec{0}.$$

Per $\lambda_1 = \frac{1}{3}$, si ha
$A^{-1} - \lambda_1 \mathbb{1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$
da cui si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero il sistema

$$\begin{cases} (0)v_1 + (0)v_2 + (0)v_3 = 0 \\ (0)v_1 + (-\frac{1}{3})v_2 + (\frac{1}{2})v_3 = 0 \\ (\frac{1}{3})v_1 + (1)v_2 + (\frac{1}{6})v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -\frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{2}v_3 = 0 \\ \frac{1}{3}v_1 + v_2 + \frac{1}{6}v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} v_2 = \frac{3}{2}v_3 \\ \frac{1}{3}v_1 = -\frac{3}{2}v_3 - \frac{1}{6}v_3 = -\frac{10}{6}v_3 = -\frac{5}{3}v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = \frac{3}{2}v_3 \\ v_1 = -\frac{3}{2}v_3 - \frac{1}{6}v_3 = -\frac{10}{6}v_3 = -5v_3 \end{cases}$$

quindi, ponendo ad esempio $v_3 = 1$, si ottiene $\vec{v}_1 = (-5, \frac{3}{2}, 1)$.

Per $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, si ha

$$A^{-1} - \lambda_2 \mathbb{1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - (-\frac{1}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & -(-\frac{1}{2}) & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero il sistema

$$\begin{cases} (\frac{5}{6})v_1 + (0)v_2 + (0)v_3 = 0 \\ (0)v_1 + (\frac{1}{2})v_2 + (\frac{1}{2})v_3 = 0 \\ (\frac{1}{3})v_1 + (1)v_2 + (1)v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{6}v_1 = 0 \\ \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 = 0 \\ \frac{1}{3}v_1 + v_2 + v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = -v_3 \end{cases}$$

quindi, ponendo ad esempio $v_3 = 1$, si ottiene $\vec{v}_2 = (0, -1, 1)$.

Per $\lambda_3 = 1$, si ha

$$A - \lambda_3 \mathbb{1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero il sistema

$$\begin{cases} (-\frac{2}{3})v_1 + (0)v_2 + (0)v_3 = 0 \\ (0)v_1 + (-1)v_2 + (\frac{1}{2})v_3 = 0 \\ (\frac{1}{3})v_1 + (1)v_2 + (\frac{1}{2})v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3}v_1 = 0 \\ -v_2 + \frac{1}{2}v_3 = 0 \\ \frac{1}{3}v_1 + v_2 + \frac{1}{2}v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_3 = 2v_2 \end{cases}$$

quindi, ponendo ad esempio $v_2 = 1$, si ottiene $\vec{v}_3 = (0, 1, 2)$.

Soluzioni esercizio 2 Il sistema può essere riscritto in forma matriciale, $A\vec{u} = \vec{b}$, dove la matrice dei coefficienti è $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ e il vettore colonna dei termini noti è $b = \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \\ 16 \end{pmatrix}$.

Il sistema è quindi equivalente a $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \\ 16 \end{pmatrix}$.

1. Dato che $A\vec{u} = \vec{b}$, si ottiene $\vec{u} = A^{-1}\vec{b}$. Bisogna quindi calcolare la matrice A^{-1}, l'inversa della matrice A. Il determinante della matrice A è
$\det A = 2 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$
$2(-2(2) - (-1)(4)) - (3(2) - (-1)(1)) - 3(3(4) - (-2)(1)) = -7 - 42 = -49$.
La matrice dei cofattori di A è

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (-2(2) - (-1)(4)) & -(3(2) - (-1)(1)) & (3(4) - (-2)(1)) \\ -(1(2) - (-3)(4)) & (2(2) - (-3)(1)) & -(2(4) - (1)(1)) \\ (1(-3) - (-3)(-2)) & -(2(-1) - (-3)(3)) & (2(-2) - (1)(3)) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -7 & 14 \\ -14 & 7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 \end{pmatrix}.$$

La matrice trasposta di $\widetilde{A}$ è quindi
$$\widetilde{A}^T = \begin{pmatrix} 0 & -14 & -7 \\ -7 & 7 & -7 \\ 14 & -7 & -7 \end{pmatrix}$$
e la matrice inversa di A è uguale a
$$A^{-1} = \frac{\widetilde{A}^T}{\det A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-14}{-49} & \frac{-7}{-49} \\ \frac{-7}{-49} & \frac{7}{-49} & \frac{-7}{-49} \\ \frac{14}{-49} & \frac{-7}{-49} & \frac{-7}{-49} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$
Quindi, si ha
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0(-10) + \frac{2}{7}(-1) + \frac{1}{7}(16) \\ \frac{1}{7}(-10) + (-\frac{1}{7})(-1) + \frac{1}{7}(16) \\ -\frac{2}{7}(-10) + \frac{1}{7}(-1) + \frac{1}{7}(16) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{7}+\frac{16}{7} \\ \\ -\frac{10}{7}+\frac{1}{7}+\frac{16}{7} \\ \\ \frac{20}{7}-\frac{1}{7}+\frac{16}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{7} \\ \\ \frac{7}{7} \\ \\ \frac{35}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

quindi la soluzione del sistema è $x = 2, y = 1$ e $z = 5$.

2. In modo alternativo ma equivalente, con il metodo di Cramer si ottiene

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -10 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 16 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-10\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 16 & 2 \end{vmatrix} +(-3) \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 16 & 4 \end{vmatrix}}{-49} =$$

$$\frac{-10(-2(2)-(-1)(4))-((-1)(2)-(-1)(16))-3(-1(4)-(-2)(16))}{-49} = \frac{-14-84}{-49} =$$
$$\frac{-98}{-49} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -10 & -3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 16 & 2 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} -10 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} -16 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} +2 \begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{-49} =$$

$$\frac{(-10(-1)-(-3)(-1))-16((2)(-1)-(-3)(3))+2(2(-1)-(-10)(3))}{-49} = \frac{7-112+56}{-49} =$$
$$\frac{-49}{-49} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -10 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}}{\det A} = 2\frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} -10 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{-49} =$$

$$\frac{2(-2(16)-(-1)(4))-1(3(16)-(-1)(1))-10(3(4)-(-2)(1))}{-49} = \frac{-56-49-140}{-49} =$$
$$\frac{-245}{-49} = 5$$

quindi la soluzione del sistema è $x = 2, y = 1$ e $z = 5$.

Soluzioni esercizio 3

1. Il determinante della matrice A è
$\det A = \frac{1}{4}(\frac{5}{2}) - (-\frac{3}{2})(\frac{1}{3}) = \frac{5}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5+4}{8} = \frac{9}{8} \neq 0$, quindi A è invertibile.
La matrice dei cofattori di A è

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}(\frac{5}{2}) & (-1)^{1+2}(\frac{1}{3}) \\ (-1)^{2+1}(-\frac{3}{2}) & (-1)^{2+2}(\frac{1}{4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

La matrice trasposta di $\widetilde{A}$ è quindi

$$\widetilde{A}^T = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

e la matrice inversa di A è uguale a

$$A^{-1} = \frac{\widetilde{A}^T}{\det A} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{5}{2}}{\frac{9}{8}} & \frac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{8}} \\ \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{9}{8}} & \frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{8}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}(\frac{8}{9}) & \frac{3}{2}(\frac{8}{9}) \\ -\frac{1}{3}(\frac{8}{9}) & \frac{1}{4}(\frac{8}{9}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{9} & \frac{4}{3} \\ -\frac{8}{27} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}.$$

2. Gli autovalori della matrice A sono i valori λ che risolvono

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0,$$

in cui

$$A - \lambda \mathbb{1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \lambda & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{2} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Il determinante della matrice $A - \lambda \mathbb{1}$ è uguale a

$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = (\frac{1}{4} - \lambda)(\frac{5}{2} - \lambda) - (\frac{3}{2})(\frac{1}{3}) = \frac{5}{8} - \frac{1}{4}\lambda - \frac{5}{2}\lambda + \lambda^2 + \frac{1}{2} =$

$\lambda^2 + \frac{-1-10}{4}\lambda + \frac{5+4}{8} = \lambda^2 - \frac{11}{4}\lambda + \frac{9}{8}$.

Risolvendo

$$\lambda^2 + \frac{-11}{4}\lambda + \frac{9}{8} = 0,$$

si ottengono gli autovalori della matrice A:
$\lambda^2 + \frac{-11}{4}\lambda + \frac{9}{8} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-(-\frac{11}{4}) \pm \sqrt{(-\frac{11}{4})^2 - 4(\frac{9}{8})}}{2} = \frac{\frac{11}{4} \pm \sqrt{\frac{121}{16} - \frac{9}{2}}}{2} =$
$\frac{\frac{11}{4} \pm \sqrt{\frac{121-72}{16}}}{2} = \frac{\frac{11}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16}}}{2} = \frac{\frac{11}{4} \pm \frac{7}{4}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\frac{11-7}{4}}{2} = \frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{\frac{11+7}{4}}{2} = \frac{9}{4}$.
I due autovalori della matrice A sono quindi $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{9}{4}$.
Per calcolare l'autovettore $\vec{v}_i = (v_1, v_2)$ corrispondente all'autovalore λ_i della matrice, bisogna risolvere

$$(A - \lambda_i \mathbb{1})\vec{v}_i = \vec{0}.$$

Per $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, si ha
$A - \lambda_1 \mathbb{1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}$
da cui si ottiene

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero il sistema

$$\begin{cases} (\frac{1}{4})v_1 + (-\frac{3}{2})v_2 = 0 \\ (\frac{1}{3})v_1 + (2)v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = -6v_2$$

quindi, ponendo ad esempio $v_2 = 1$, si ottiene $\vec{v}_1 = (-6, 1)$.

Per $\lambda_2 = \frac{9}{4}$, si ha
$A - \lambda_2 \mathbb{1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{9}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{2} - \frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$
da cui si ottiene

$$\begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero il sistema

$$\begin{cases} (-2)v_1 + (-\frac{3}{2})v_2 = 0 \\ (\frac{1}{3})v_1 + (\frac{1}{4})v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = -\frac{3}{4}v_2$$

quindi, ponendo ad esempio $v_2 = 1$, si ottiene $\vec{v}_2 = (-\frac{3}{4}, 1)$.

3. Si ha

$$D = C^{-1}AC$$

dove

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

è la matrice diagonale che ha come elementi diagonali gli autovalori della matrice A e

$$C = \begin{pmatrix} -6 & -\frac{3}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è la matrice che ha per colonne gli autovettori della matrice A (nello stesso ordine in cui appaiono gli autovalori associati di A nella diagonale di D).

Per diagonalizzare A bisogna calcolare C^{-1} (la matrice C è invertibile in quanto costituita da autovettori, i.e. vettori linearmente indipendenti).
Il determinante della matrice C è $\det C = -6(1)-(-\frac{3}{4})(1) = -6+\frac{3}{4} = -\frac{21}{4}$. La matrice dei cofattori di C è

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}(1) & (-1)^{1+2}(1) \\ \\ (-1)^{2+1}(-\frac{3}{4}) & (-1)^{2+2}(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \\ \frac{3}{4} & -6 \end{pmatrix}.$$

La matrice trasposta di $\widetilde{C}$ è quindi

$$\widetilde{C}^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} \\ \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

e la matrice inversa di C è uguale a

$$C^{-1} = \frac{\widetilde{C}^T}{\det C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-\frac{21}{4}} & \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{21}{4}} \\ \\ \frac{-1}{-\frac{21}{4}} & \frac{-6}{-\frac{21}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(-\frac{4}{21}) & \frac{3}{4}(-\frac{4}{21}) \\ \\ -1(-\frac{4}{21}) & -6(-\frac{4}{21}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{21} & -\frac{1}{7} \\ \\ \frac{4}{21} & \frac{24}{21} \end{pmatrix}.$$

Quindi $D = C^{-1}AC$ corrisponde a

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \\ 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{21} & -\frac{1}{7} \\ \\ \frac{4}{21} & \frac{24}{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & -\frac{3}{4} \\ \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Gli autovalori della matrice A^{-1} sono i valori λ che risolvono

$$\det(A^{-1} - \lambda\mathbb{1}) = 0,$$

in cui

$$A^{-1} - \lambda\mathbb{1} = \begin{pmatrix} \frac{20}{9} - \lambda & \frac{4}{3} \\ \\ -\frac{8}{27} & \frac{2}{9} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Il determinante della matrice $A^{-1} - \lambda\mathbb{1}$ è uguale a

$\det(A^{-1}-\lambda\mathbb{1}) = (\frac{20}{9}-\lambda)(\frac{2}{9}-\lambda)-(\frac{4}{3})(-\frac{8}{27}) = \frac{40}{81}-\frac{20}{9}\lambda-\frac{2}{9}\lambda+\lambda^2+\frac{32}{81} =$

$\lambda^2 + \frac{-20-2}{9}\lambda + \frac{40+32}{81} = \lambda^2 - \frac{22}{9}\lambda + \frac{72}{81} = \lambda^2 - \frac{22}{9}\lambda + \frac{8}{9}$.

Risolvendo

$$\lambda^2 - \frac{22}{9}\lambda + \frac{8}{9} = 0,$$

si ottengono gli autovalori della matrice A^{-1}:
$\lambda^2 - \frac{22}{9}\lambda + \frac{8}{9} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-(-\frac{22}{9})\pm\sqrt{(-\frac{22}{9})^2-4(\frac{8}{9})}}{2} = \frac{\frac{22}{9}\pm\sqrt{\frac{484}{81}-\frac{32}{9}}}{2} = \frac{\frac{22}{9}\pm\sqrt{\frac{484-288}{81}}}{2} = \frac{\frac{22}{9}\pm\sqrt{\frac{196}{81}}}{2} = \frac{\frac{22}{9}\pm\frac{14}{9}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\frac{22-14}{9}}{2} = \frac{4}{9}$ e $\lambda_2 = \frac{\frac{22+14}{9}}{2} = 2.$
I due autovalori della matrice A sono quindi $\lambda_1 = \frac{4}{9}$ e $\lambda_2 = 2$.
Per calcolare l'autovettore $\vec{v}_i = (v_1, v_2)$ corrispondente all'autovalore λ_i della matrice, bisogna risolvere

$$(A^{-1} - \lambda_i \mathbb{1})\vec{v}_i = \vec{0}.$$

Per $\lambda_1 = \frac{4}{9}$, si ha
$A^{-1} - \lambda_1 \mathbb{1} = \begin{pmatrix} \frac{20}{9} - \frac{4}{9} & \frac{4}{3} \\ -\frac{8}{27} & \frac{2}{9} - \frac{4}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{9} & \frac{4}{3} \\ -\frac{8}{27} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix}$
da cui si ottiene

$$\begin{pmatrix} \frac{16}{9} & \frac{4}{3} \\ -\frac{8}{27} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero il sistema

$$\begin{cases} (\frac{16}{9})v_1 + (\frac{4}{3})v_2 = 0 \\ (-\frac{8}{27})v_1 + (-\frac{2}{9})v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = -\frac{3}{4}v_2$$

quindi, ponendo ad esempio $v_2 = 1$, si ottiene $\vec{v}_1 = (-\frac{3}{4}, 1)$.

Per $\lambda_2 = 2$, si ha
$A^{-1} - \lambda_2 \mathbb{1} = \begin{pmatrix} \frac{20}{9} - 2 & \frac{4}{3} \\ -\frac{8}{27} & \frac{2}{9} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{3} \\ -\frac{8}{27} & -\frac{16}{9} \end{pmatrix}$
da cui si ottiene

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{3} \\ -\frac{8}{27} & -\frac{16}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero il sistema

$$\begin{cases} (\frac{2}{9})v_1 + (\frac{4}{3})v_2 = 0 \\ (-\frac{8}{27})v_1 + (-\frac{16}{9})v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = -6v_2$$

quindi, ponendo ad esempio $v_2 = 1$, si ottiene $\vec{v}_2 = (-6, 1)$.

5. Si ha

$$D = C^{-1}A^{-1}C$$

dove D è la matrice diagonale che ha come elementi diagonali gli autovalori della matrice A^{-1} e C è la matrice che ha per colonne gli autovettori della matrice A^{-1} (nello stesso ordine in cui appaiono gli autovalori associati di A^{-1} nella diagonale di D).
Dato che gli autovettori di A e A^{-1} sono uguali, come calcolato nei punti precedenti, si ha che

$$C = \begin{pmatrix} -6 & -\frac{3}{4} \\ & \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{21} & -\frac{1}{7} \\ & \\ \frac{4}{21} & \frac{24}{21} \end{pmatrix}$$

Quindi $D = C^{-1}A^{-1}C$ corrisponde a

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ & \\ 0 & \frac{4}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{21} & -\frac{1}{7} \\ & \\ \frac{4}{21} & \frac{24}{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{20}{9} & \frac{4}{3} \\ & \\ -\frac{8}{27} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & -\frac{3}{4} \\ & \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$