Esercitazione 11 - Soluzioni

Francesco Davì

14 dicembre 2012

Soluzioni esercizio 1

1. Integrazione per sostituzione:
   la sostituzione scelta è $u = 3\ln x$, in questo modo si ottiene
   $\mathrm{d}u = \frac{3}{x}\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{3} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$.
   Si ha quindi:

   $$\int \frac{\sin(3\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int \sin(3\ln x)\,\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \sin(u)\,\frac{\mathrm{d}u}{3} = \frac{1}{3}\int \sin u\,\mathrm{d}u =$$
   $$\frac{1}{3}(-\cos u) + c = -\frac{1}{3}\cos(3\ln x) + c, \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

   (Per verificare se la soluzione è corretta, è sufficiente verificare se la derivata di $-\frac{1}{3}\cos(3\ln x)$ è uguale a $\frac{\sin(3\ln x)}{x}$)

2. Integrazione per sostituzione:
   la sostituzione scelta è $u = 1 + e^x$, in questo modo si ottiene
   $\mathrm{d}u = e^x\mathrm{d}x$.
   Si ha quindi:

   $$\int e^x\sqrt{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1+e^x}\;e^x\mathrm{d}x = \int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \int u^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u =$$
   $$\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(1+e^x)^{\frac{3}{2}} + c, \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

   (Per verificare se la soluzione è corretta, è sufficiente verificare se la derivata di $\frac{2}{3}(1+e^x)^{\frac{3}{2}}$ è uguale a $e^x\sqrt{1+e^x}$)

3. Integrazione per sostituzione:
   la sostituzione scelta è $u = \sqrt{x+1}$, in questo modo si ottiene
   $\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x \Rightarrow 2\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}}$.
   Si ha quindi:

   $$\int_0^8 \frac{\cos(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int_0^8 \cos(\sqrt{x+1})\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}} = \int_{\sqrt{0+1}}^{\sqrt{8+1}} \cos(u)\,2\,\mathrm{d}u =$$

$2\int_1^3 \cos u \, \mathrm{d}u = 2\sin u\Big|_1^3 = 2(\sin 3 - \sin 1).$

Si può procedere anche considerando la sostituzione $u^2 = x+1$, da cui si ottiene
$2u\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$.
Si ha quindi:

$$\int_0^8 \frac{\cos(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{0+1}}^{\sqrt{8+1}} \frac{\cos(u)}{u}\,2\,u\,\mathrm{d}u = 2\int_1^3 \cos u\,\mathrm{d}u = 2\sin u\Big|_1^3 =$$
$$2(\sin 3 - \sin 1).$$

È possibile non effettuare la sostituzione degli estremi dell'integrale, purché si segnali il fatto che gli estremi sono relativi alla variabile x e si effettui la sostituzione inversa prima di calcolare la primitiva negli estremi. Si ha

$$\int_0^8 \frac{\cos(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = 2\int_{x=0}^{x=8} \cos u\,\mathrm{d}u = 2\sin u\Big|_{x=0}^{x=8} = 2\sin(\sqrt{x+1})\Big|_{x=0}^{x=8} =$$
$$2(\sin(\sqrt{8+1}) - \sin(\sqrt{0+1})) = 2(\sin 3 - \sin 1).$$

4. Integrazione per parti: $\displaystyle\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$

   Chiaramente, si vuole che l'integrale $\displaystyle\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$ sia più semplice di $\displaystyle\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Per questo motivo, si scelgono $f'(x)$ e $g(x)$ in modo tale che $f(x)$ (la primitiva di $f'(x)$) e $g'(x)$ (la derivata di $g(x)$) siano facili da calcolare e diano luogo a un integrale più semplice di quello assegnato.
   Poniamo allora
   $f'(x) = x$ e $g(x) = \operatorname{arctg} x$
   da cui si ottiene che
   $f(x) = \frac{x^2}{2}$ e $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
   Applicando la formula dell'integrazione per parti si ha:
   $$\int x \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$
   La funzione razionale $\frac{x^2}{1+x^2}$ non è regolare (in quanto numeratore e denominatore hanno lo stesso grado). Ogni funzione non regolare si può scrivere come somma di un polinomio e di una funzione regolare. Per determinare tale somma, si effettua la divisione tra i polinomi al numeratore e al denominatore. Nei casi in cui numeratore e denominatore hanno lo stesso grado, è possibile ottenere tale somma semplicemente

manipolando la funzione razionale.
Ad esempio, nel caso in esame si ha

$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{1+x^2} = \frac{1+x^2}{1+x^2} + \frac{-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$

Altrimenti, attraverso la divisione si ottiene

$$\begin{array}{rc|c} & x^2 & 1+x^2 \\ \cline{3-3} - & 1+x^2 & 1 \\ \cline{2-2} & -1 & \end{array}$$

da cui segue $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$.

Allora si ha
$\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$
$\displaystyle\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int 1\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$
$\displaystyle\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c$, con $c \in \mathbb{R}$.

(Per verificare se la soluzione è corretta, è sufficiente verificare se la derivata di $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$ è uguale a $x \operatorname{arctg} x$)

5. Si può notare che $\displaystyle\int \arcsin x \,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \arcsin x \,\mathrm{d}x$ per cui è possibile applicare l'integrazione per parti:
$\displaystyle\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$
Poniamo
$f'(x) = 1$ e $g(x) = \arcsin x$
da cui si ottiene che
$f(x) = x$ e $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Applicando la formula dell'integrazione per parti si ha:
$\displaystyle\int \arcsin x \,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \arcsin x \,\mathrm{d}x = x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x =$
$\displaystyle x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$
Per risolvere l'integrale $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ si può utilizzare l'integrazione per sostituzione:
la sostituzione scelta è $u = 1 - x^2$, in questo modo si ottiene
$\mathrm{d}u = -2x\mathrm{d}x \Rightarrow -\frac{\mathrm{d}u}{2} = x\mathrm{d}x$.
Si ha quindi:

$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\,(-\frac{\mathrm{d}u}{2}) = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u =$
$\displaystyle -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}) + c = -\frac{1}{2}(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}) + c = -\frac{1}{2}2u^{\frac{1}{2}} + c =$
$-u^{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$, con $c \in \mathbb{R}$.
Allora
$\displaystyle\int \arcsin x\,\mathrm{d}x = x\arcsin x - (-\sqrt{1-x^2}) + c = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c,$
con $c \in \mathbb{R}$.

6. Integrazione per parti: $\displaystyle\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$
Poniamo
$f'(x) = x^3$ e $g(x) = (\ln x)^2$
da cui si ottiene che
$f(x) = \frac{x^4}{4}$ e $g'(x) = \frac{2\ln x}{x}$.
Applicando la formula dell'integrazione per parti si ha:
$\displaystyle\int_1^e x^3(\ln x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}(\ln x)^2\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^4}{4}\frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}(\ln x)^2\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^3\ln x\,\mathrm{d}x.$
Per risolvere $\displaystyle\int_1^e x^3\ln x\,\mathrm{d}x$ si applica nuovamente l'integrazione per parti.
Poniamo
$f'(x) = x^3$ e $g(x) = \ln x$
da cui si ottiene che
$f(x) = \frac{x^4}{4}$ e $g'(x) = \frac{1}{x}$.
Applicando la formula dell'integrazione per parti si ha:
$\displaystyle\int_1^e x^3\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^4}{4}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{4}\int_1^e x^3\,\mathrm{d}x =$
$\displaystyle\frac{x^4}{4}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{4}\frac{x^4}{4}\Big|_1^e.$
Allora
$\displaystyle\int_1^e x^3(\ln x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}(\ln x)^2\Big|_1^e - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{4}\frac{x^4}{4}\Big|_1^e\right) =$
$\displaystyle\frac{x^4}{4}(\ln x)^2\Big|_1^e - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4}\ln x\Big|_1^e + \frac{1}{8}\frac{x^4}{4}\Big|_1^e =$
$\displaystyle\left(\frac{e^4}{4}(\ln e)^2 - \frac{1^4}{4}(\ln 1)^2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{e^4}{4}\ln e - \frac{1^4}{4}\ln 1\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{e^4}{4} - \frac{1^4}{4}\right) =$
$\displaystyle\frac{e^4}{4} - \frac{1}{2}\frac{e^4}{4} + \frac{1}{8}\frac{e^4}{4} - \frac{1}{8}\frac{1}{4} = \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{8} + \frac{e^4}{32} - \frac{1}{32} = \frac{8-4+1}{32}e^4 - \frac{1}{32} =$
$\displaystyle\frac{5}{32}e^4 - \frac{1}{32}.$

7. La funzione razionale $\frac{x^3+2}{x^3-x}$ non è regolare (in quanto numeratore e denominatore hanno lo stesso grado). Ogni funzione non regolare si può scrivere come somma di un polinomio e di una funzione regolare. Per determinare tale somma, si effettua la divisione tra i polinomi al numeratore e al denominatore. Nei casi in cui numeratore e denominatore hanno lo stesso grado, è possibile ottenere tale somma semplicemente manipolando la funzione razionale.
Ad esempio, nel caso in esame si ha

$\frac{x^3+2}{x^3-x} = \frac{x^3-x+x+2}{x^3-x} = \frac{x^3-x}{x^3-x} + \frac{x+2}{x^3-x} = 1 + \frac{x+2}{x^3-x}.$

Altrimenti, attraverso la divisione si ottiene

$$\begin{array}{r|c} x^3+2 & x^3-x \\ \cline{2-2} -\quad x^3-x & 1 \\ \hline x+2 & \end{array}$$

da cui segue $\frac{x^3+2}{x^3-x} = 1 + \frac{x+2}{x^3-x}$.

Allora si ha
$\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x^3-x}\,\mathrm{d}x = \int 1 + \frac{x+2}{x^3-x}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x + \int \frac{x+2}{x^3-x}\,\mathrm{d}x =$
$\displaystyle x + \int \frac{x+2}{x^3-x}\,\mathrm{d}x + c$, con $c \in \mathbb{R}$.

La funzione razionale $\frac{x+2}{x^3-x}$ è regolare (in quanto il grado del numeratore è inferiore al grado del denominatore) e quindi può essere scritta come somma di elementi semplici, attraverso il metodo dei coefficienti indeterminati:
$\frac{x+2}{x^3-x} = \frac{x+2}{x(x^2-1)} = \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} =$

$\frac{A(x-1)(x+1)+B(x)(x+1)+C(x)(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{Ax^2-A+Bx^2+Bx+Cx^2-Cx}{x^3-x} =$

$\frac{(A+B+C)x^2+(B-C)x-A}{x^3-x}.$
Dato che deve essere $x+2 = (A+B+C)x^2 + (B-C)x - A$, devono valere le seguenti condizioni
$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ B-C=1 \\ -A=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2+1+C+C=0 \\ B=1+C \\ A=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=\frac{1}{2} \\ B=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \\ A=-2 \end{cases}$$
Quindi si ha
$\frac{x+2}{x^3-x} = -\frac{2}{x} + \frac{3}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$
da cui segue che

$$\int \frac{x^3+2}{x^3-x}\,\mathrm{d}x = x + \int \frac{x+2}{x^3-x}\,\mathrm{d}x \ + c =$$

$$x + \int -\frac{2}{x} + \frac{3}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}\,\mathrm{d}x \ + c =$$

$$x - 2\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \ + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x \ + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \ + c =$$

$$x - 2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + c, \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

(Per verificare se la soluzione è corretta, è sufficiente verificare se la derivata di $x - 2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1|$ è uguale a $\frac{x^3+2}{x^3-x}$)