Esercitazione 14 - Soluzioni

Francesco Davì

11 gennaio 2013

Soluzioni esercizio 1

Si ha
$$D = C^{-1}AC$$
dove D è la matrice diagonale che ha come elementi diagonali gli autovalori della matrice A e C è la matrice che ha per colonne gli autovettori della matrice A (nello stesso ordine in cui appaiono gli autovalori associati di A nella diagonale di D).
Gli autovalori della matrice A sono i valori λ che risolvono
$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0,$$
in cui

$A - \lambda \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$.

Il determinante della matrice $A - \lambda \mathbb{1}$ è uguale a

$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = (1-\lambda)(2-\lambda) - (3)(2) = 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4.$

Risolvendo
$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0,$$
si ottengono gli autovalori della matrice A:
$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(-4)}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{3\pm5}{2} \Rightarrow$
$\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 4$.
I due autovalori della matrice A sono quindi $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 4$.
Per calcolare l'autovettore $\vec{v}_i = (v_1, v_2)$ corrispondente all'autovalore λ_i della matrice, bisogna risolvere
$$(A - \lambda_i \mathbb{1})\vec{v}_i = \vec{0}.$$
Per $\lambda_1 = -1$, si ha
$A - \lambda_1 \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1-(-1) & 3 \\ 2 & 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

da cui si ottiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2v_1 + 3v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = -\tfrac{3}{2}v_2$$

quindi, ponendo ad esempio $v_2 = 2$, si ottiene $\vec{v}_1 = (-3, 2)$.

Per $\lambda_2 = 4$, si ha
$A - \lambda_2 \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1-4 & 3 \\ 2 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$
da cui si ottiene

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero il sistema

$$\begin{cases} -3v_1 + 3v_2 = 0 \\ 2v_1 - 2v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = v_2$$

quindi, ponendo ad esempio $v_2 = 1$, si ottiene $\vec{v}_2 = (1, 1)$.

Vale allora $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Bisogna calcolare la matrice C^{-1} (la matrice C è invertibile in quanto costituita da autovettori, i.e. vettori linearmente indipendenti).
Il determinante della matrice C è $\det C = -3(1) - (1)(2) = -5$. La matrice dei cofattori di C è

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}(1) & (-1)^{1+2}(2) \\ \\ (-1)^{2+1}(2) & (-1)^{2+2}(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

La matrice trasposta di $\widetilde{C}$ è quindi

$$\widetilde{C}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

e la matrice inversa di C è uguale a
$C^{-1} = \frac{\widetilde{C}^T}{\det C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-5} & \frac{-1}{-5} \\ \\ \frac{-2}{-5} & \frac{-3}{-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$
Quindi $D = C^{-1}AC$ corrisponde a

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzioni esercizio 2

L'equazione di una retta passante per due generici punti di coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) con $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$ è $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, quindi la retta r cercata ha equazione
$\frac{x-(-1)}{3-(-1)} = \frac{y-(6)}{9-(6)} \Rightarrow \frac{x+1}{4} = \frac{y-6}{3}$.

1. Il vettore $\vec{v} = (a, b)$ con $a = x_2 - x_1$ e $b = y_2 - y_1$ individua la direzione di una generica retta $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Quindi il vettore $\vec{v} = (4, 3)$ individua la direzione della retta r.

2. La direzione ortogonale a r è individuata dal vettore ortogonale a $\vec{v}$: $\vec{w} = (-3, 4)$ (oppure $\vec{w} = (3, -4)$).

3. L'equazione di una retta con direzione individuata dal vettore $\vec{w} = (a, b)$ e passante per un generico punto di coordinate (x_0, y_0) è $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$, quindi la retta s cercata ha equazione
$\frac{x-(-2)}{-3} = \frac{y-(-1)}{4} \Rightarrow \frac{-x-2}{3} = \frac{y+1}{4}$

4. Per calcolare le coordinate del punto Q bisogna risolvere il sistema contenente la retta r e la retta s:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{4} = \frac{y-6}{3} \\ \frac{-x-2}{3} = \frac{y+1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4\frac{y-6}{3} - 1 = \frac{4}{3}y - 9 \\ 4(-(\frac{4}{3}y - 9) - 2) = 3(y+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3}y - 9 \\ -\frac{16}{3}y + 28 = 3y + 3 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3}y - 9 \\ \frac{25}{3}y = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 3 \end{cases}$$

   Quindi $Q = (-5, 3)$.

5. La distanza tra due generici punti di coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) è uguale a $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Allora la distanza tra i punti P e Q è: $\sqrt{(-2-(-5))^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

   La distanza tra un punto di coordinate (x_0, y_0) e una retta di equazione $Ax + By + C = 0$ è uguale a $\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Allora la distanza tra il punto $P = (-2, -1)$ e la retta $r : \frac{x+1}{4} = \frac{y-6}{3} \Rightarrow 3(x+1) = 4(y-6) \Rightarrow 3x - 4y + 27 = 0$ è:

$$\frac{|3(-2)+(-4)(-1)+27|}{\sqrt{3^2+(4)^2}} = \frac{|-6+4+27|}{\sqrt{9+16}} = \frac{25}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5,$$

   che coincide con la distanza tra i punti P e Q calcolata nel punto precedente.

Soluzioni esercizio 3

Inizialmente, calcoliamo l'integrale indefinito: $\int e^x \sin x \mathrm{d}\, x$.

Integrazione per parti: $\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$.
Poniamo
$f'(x) = e^x$ e $g(x) = \sin x$
da cui si ottiene che
$f(x) = e^x$ e $g'(x) = \cos x$.
Applicando la formula dell'integrazione per parti si ha:

$$\int e^x \sin x \mathrm{d}\, x = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,\mathrm{d}x.$$

Per risolvere l'integrale indefinito $\int e^x \cos x\,\mathrm{d}x$ si applica nuovamente l'integrazione per parti, ponendo $f'(x) = e^x$ e $g(x) = \cos x$:

$$\int e^x \cos x\,\mathrm{d}x = e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)\mathrm{d}\, x = e^x \cos x + \int e^x \sin x \mathrm{d}\, x.$$

Si ha quindi

$$\int e^x \sin x \mathrm{d}\, x = e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x) = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x,$$

da cui si ottiene

$$2 \int e^x \sin x \mathrm{d}\, x = e^x \sin x - e^x \cos x \Rightarrow$$
$$\int e^x \sin x \mathrm{d}\, x = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}.$$

Allora

$$\int_0^\pi e^x \sin x \mathrm{d}\, x = \left.\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}\right|_0^\pi = \frac{e^\pi(\sin\pi - \cos\pi)}{2} - \frac{e^0(\sin 0 - \cos 0)}{2} =$$

$$\frac{e^\pi(0-(-1))}{2} - \frac{1(0-1)}{2} = \frac{e^\pi}{2} - \frac{-1}{2} = \frac{1}{2}(e^\pi + 1).$$

Soluzioni esercizio 4

1. Si ha

    - $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(0) + \frac{1}{\cos^2(0)}x + \ldots = x + \ldots$
      da cui segue
      $\operatorname{tg}(x^3) = x^3 + \ldots$
    - $e^x = e^0 + e^0 x + \frac{1}{2}e^0 x^2 + \ldots = 1 + x + \ldots$
      da cui segue
      $e^{x^2} = 1 + x^2 + \ldots$
      e
      $e^{\operatorname{tg}(x^3)} = 1 + \operatorname{tg}(x^3) + \ldots = 1 + x^3 \ldots$ (per quanto visto al punto precedente)
    - $\cos x = \cos(0) + (-\sin(0))x + \frac{1}{2}(-\cos(0))x^2 + \ldots = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \ldots$

    da cui segue che

    $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg}(x^3)} - 1}{x(\cos x - e^{x^2})} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x^3 + \ldots - 1}{x(1 - \frac{1}{2}x^2 + \ldots - 1 - x^2 + \ldots)} =$$
    $$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + \ldots}{-\frac{3}{2}x^3 + \ldots} = -\frac{2}{3}$$

    (Con la scrittura "…" indichiamo i termini successivi della formula di Taylor. Per la definizione della formula di Taylor, tali termini sono di grado superiore a quelli che sono stati calcolati esplicitamente e per tale motivo tendono a zero per $x \to 0$)

2. Si ha

    - $e^x = e^0 + e^0 x + \frac{1}{2}e^0 x^2 + \ldots = 1 + x + \ldots$ da cui segue
      $e^{x^2} = 1 + x^2 + \ldots$
    - $\cos x = \cos(0) + (-\sin(0))x + \frac{1}{2}(-\cos(0))x^2 + \ldots = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \ldots$
    - dato che se $f(x) = (1 + x^2)^{\frac{1}{4}}$ allora
      $f'(x) = \frac{1}{4}(1 + x^2)^{-\frac{3}{4}}(2(x)) = \frac{1}{2}x(1 + x^2)^{-\frac{3}{4}}$
      e
      $f''(x) = \frac{1}{2}((1)(1 + x^2)^{-\frac{3}{4}} + x(-\frac{3}{4}(1 + x^2)^{-\frac{7}{4}}(2x))) =$
      $\frac{1}{2}((1 + x^2)^{-\frac{3}{4}} - \frac{3}{2}x^2(1 + x^2)^{-\frac{7}{4}})$
      si ha
      $(1 + x^2)^{\frac{1}{4}} = (1 + 0^2)^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}0(1 + 0^2)^{-\frac{3}{4}}x + \frac{1}{2}((1 + 0^2)^{-\frac{3}{4}} - \frac{3}{2}0^2(1 + 0^2)^{-\frac{7}{4}})\frac{1}{2}x^2 + \ldots = 1 + \frac{1}{4}x^2 + \ldots$
    - dato che se $f(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{4}}$ allora
      $f'(x) = \frac{1}{4}(1 - x^2)^{-\frac{3}{4}}(-2(x)) = -\frac{1}{2}x(1 - x^2)^{-\frac{3}{4}}$
      e

$f''(x) = -\frac{1}{2}((1)(1-x^2)^{-\frac{3}{4}} + x(-\frac{3}{4}(1-x^2)^{-\frac{7}{4}}(-2x))) =$
$-\frac{1}{2}((1-x^2)^{-\frac{3}{4}} + \frac{3}{2}x^2(1-x^2)^{-\frac{7}{4}})$
si ha
$(1-x^2)^{\frac{1}{4}} = (1-0^2)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}0(1-0^2)^{-\frac{3}{4}}x - \frac{1}{2}((1-0^2)^{-\frac{3}{4}} + \frac{3}{2}0^2(1-$
$0^2)^{-\frac{7}{4}})\frac{1}{2}x^2 + \ldots = 1 - \frac{1}{4}x^2 + \ldots$

da cui segue che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{x^2}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}} - (1-x^2)^{\frac{1}{4}}} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \ldots - 1 - x^2 + \ldots}{1 + \frac{1}{4}x^2 + \ldots - 1 + \frac{1}{4}x^2 + \ldots} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 - x^2 + \ldots}{\frac{2}{4}x^2 + \ldots} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{3}{2}x^2 + \ldots}{\frac{1}{2}x^2 + \ldots} = -3$$