Esercitazione 1 - Soluzioni

Francesco Davì

5 ottobre 2012

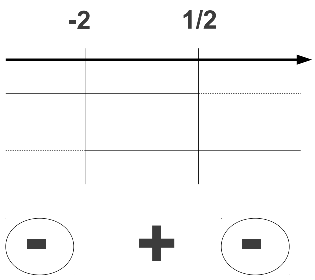
Esercizio 1

(a) Si ottiene $5\,x \leq -18$ (o equivalentemente $-5\,x \geq 18$), la cui soluzione è $x \leq -\frac{18}{5}$.

(b) Bisogna determinare l'unione delle soluzioni dei due sistemi di disequazioni $\begin{cases} 2\,x+1 \geq 0 \\ 2\,x+1 < 3\,x \end{cases}$ e $\begin{cases} 2\,x+1 < 0 \\ -2\,x-1 < 3\,x \end{cases}$. Il primo sistema è equivalente a $\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases}$ la cui soluzione è $x > 1$. Il secondo sistema è equivalente a $\begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{5} \end{cases}$ che ha come soluzione l'insieme vuoto, non esistono cioé valori di x che soddisfano tale sistema di disequazioni (in simboli $\nexists x \in \mathbb{R}$). Allora l'unione delle soluzioni dei due sistemi, e quindi la soluzione dell'esercizio, è uguale a $x > 1$.

(c) Deve essere $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$. Inoltre $\frac{3-x}{x+2} - 1 = \frac{3-x-x-2}{x+2} = \frac{1-2\,x}{x+2}$, quindi la disequazione in esame è equivalente a $\frac{1-2\,x}{x+2} \leq 0$. Esistono due approcci per risolvere la disequazione fratta:

- determinare l'unione delle soluzioni dei due sistemi di disequazioni $\begin{cases} 1-2\,x \geq 0 \\ x+2 < 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 1-2\,x \leq 0 \\ x+2 > 0 \end{cases}$. In questo caso si ottiene $\begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x < -2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x > -2 \end{cases}$, le cui soluzioni sono rispettivamente $x < -2$ e $x \geq \frac{1}{2}$, la cui unione è: $x < -2$ oppure $x \geq \frac{1}{2}$;
- studiare il segno delle espressioni al numeratore e al denominatore e determinare gli intervalli in cui sono discordi. In questo caso si considera $1-2\,x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$ e $x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$. Gli intervalli cercati sono quindi $x < -2$ oppure $x \geq \frac{1}{2}$ come è possibile verificare anche graficamente con il seguente schema:



(d) $a = 1 > 0$ e $\Delta = 25 > 0$. Le radici di $x^2 + x - 6 = 0$ sono $x_1 = -3$ e $x_2 = 2$, quindi la soluzione è: $x < -3$ oppure $x > 2$.

(e) Si ottiene $x^2 + 4\,x \leq 0$ che è equivalente a $x\,(x+4) \leq 0$. Bisogna determinare l'unione delle soluzioni dei due sistemi $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + 4 \leq 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x \leq 0 \\ x + 4 \geq 0 \end{cases}$. Il primo sistema è equivalente a $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -4 \end{cases}$ che non è soddisfatto per alcun valore di x, in simboli $\nexists x \in \mathbb{R}$. Il secondo sistema è equivalente a $\begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq -4 \end{cases}$ la cui soluzione è $-4 \leq x \leq 0$. Allora l'unione delle soluzioni dei due sistemi, e quindi la soluzione dell'esercizio, è: $-4 \leq x \leq 0$.

(f) Si ottiene $x^2 - 2 < 0$. $a = 1 > 0$ e $\Delta = 8 > 0$. Le radici di $x^2 - 2 = 0$ sono $x_1 = -\sqrt{2}$ e $x_2 = \sqrt{2}$, quindi la soluzione è: $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

(g) $a = 1 > 0$ e $\Delta = -4 < 0$, quindi la soluzione è: $\forall x \in \mathbb{R}$.

(h) Si ottiene $x^2 + 9 \leq 0$. $a = 1 > 0$ e $\Delta = -36 < 0$, quindi la soluzione è: $\nexists x \in \mathbb{R}$.

(i) $a = 1 > 0$ e $\Delta = 0$. Le radici di $x^2 + 2\,x + 1 = 0$ sono $x_1 = x_2 = -1$, quindi la soluzione è: $x = -1$.

(j) $a = 3 > 0$ e $\Delta = -22 < 0$, quindi la soluzione è: $\nexists x \in \mathbb{R}$.

(k) $a = 1 > 0$ e $\Delta = \frac{1}{2} > 0$. Le radici di $x^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\,x + 1 = 0$ sono $x_1 = -\sqrt{2}$ e $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, quindi la soluzione è: $x \leq -\sqrt{2}$ oppure $x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(l) Deve essere $x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$ e $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$. Inoltre $\frac{3\,x+1}{x+3} - \frac{x-2}{x+1} = \frac{(3\,x+1)\,(x+1) - (x-2)\,(x+3)}{(x+3)\,(x+1)} = \frac{3\,x^2+3\,x+x+1-(x^2+3\,x-2\,x-6)}{x^2+x+3\,x+3} = \frac{2\,x^2+3\,x+7}{x^2+4\,x+3}$. Bisogna quindi determinare l'unione delle soluzioni dei due sistemi $\begin{cases} 2\,x^2 + 3\,x + 7 > 0 \\ x^2 + 4\,x + 3 < 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2\,x^2 + 3\,x + 7 < 0 \\ x^2 + 4\,x + 3 > 0 \end{cases}$. Per l'equazione $2\,x^2 + 3\,x + 7 = 0$ vale $a = 2 > 0$ e $\Delta = -47 < 0$. Per l'equazione

$x^2+4\,x+3=0$ vale $a=1>0$ e $\Delta=4>0$. Le radici di tale equazione sono $x_1=-3$ e $x_2=-1$. Il primo sistema è allora equivalente a $\begin{cases} \forall x\in\mathbb{R} \\ -3<x<-1 \end{cases}$ la cui soluzione è: $-3<x<-1$. Il secondo sistema è equivalente a $\begin{cases} \nexists x\in\mathbb{R} \\ x<-3 \text{ oppure } x>-1 \end{cases}$ la cui soluzione è $\nexists x\in\mathbb{R}$. Allora l'unione delle soluzioni dei due sistemi, e quindi la soluzione dell'esercizio, è: $-3<x<-1$.

(m) Deve essere $x+1\neq 0 \Rightarrow x\neq -1$. Si ottiene $\frac{x^2-2\sqrt{2}\,x+2}{x+1}>0$. Bisogna determinare l'unione delle soluzioni dei due sistemi $\begin{cases} x^2-2\sqrt{2}\,x+2>0 \\ x+1>0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x^2-2\sqrt{2}\,x+2<0 \\ x+1<0 \end{cases}$. Per l'equazione $x^2-2\sqrt{2}\,x+2=0$ vale $a=1>0$ e $\Delta=0$. Le radici di tale equazione sono $x_1=x_2=\sqrt{2}$. Il primo sistema è allora equivalente a $\begin{cases} x\neq\sqrt{2} \\ x>-1 \end{cases}$ la cui soluzione è: $-1<x<\sqrt{2}$ oppure $x>\sqrt{2}$. Il secondo sistema è equivalente a $\begin{cases} \nexists x\in\mathbb{R} \\ x<-1 \end{cases}$ la cui soluzione è $\nexists x\in\mathbb{R}$. Allora l'unione delle soluzioni dei due sistemi, e quindi la soluzione dell'esercizio, è: $-1<x<\sqrt{2}$ oppure $x>\sqrt{2}$.

(n) Deve essere $3+2\,x^2\neq 0 \Rightarrow x^2\neq -\frac{3}{2}$ che è soddisfatto $\forall x\in\mathbb{R}$, in quanto non esistono numeri reali il cui quadrato sia un numero negativo, quindi non bisogna escludere alcun valore di x dall'insieme delle soluzioni della disequazione in esame. Bisogna determinare l'unione delle soluzioni dei due sistemi $\begin{cases} x+7\geq 0 \\ 3+2\,x^2<0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x+7\leq 0 \\ 3+2\,x^2>0 \end{cases}$. Per l'equazione $3+2\,x^2=0$ vale $a=2>0$ e $\Delta=-24<0$. Il primo sistema è allora equivalente a $\begin{cases} x\geq -7 \\ \nexists x\in\mathbb{R} \end{cases}$ la cui soluzione è: $\nexists x\in\mathbb{R}$. Il secondo sistema è equivalente a $\begin{cases} x\leq -7 \\ \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$ la cui soluzione è $x\leq -7$. Allora l'unione delle soluzioni dei due sistemi, e quindi la soluzione dell'esercizio, è: $x\leq -7$.

(o) Deve essere $2-x^2\neq 0 \Rightarrow x^2\neq 2 \Rightarrow x\neq -\sqrt{2}$ e $x\neq\sqrt{2}$. Bisogna determinare l'unione delle soluzioni dei due sistemi $\begin{cases} 2\,x+5\geq 0 \\ 2-x^2<0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2\,x+5\leq 0 \\ 2-x^2>0 \end{cases}$. Per l'equazione $2-x^2=0$ vale $a=-1<0$ e $\Delta=8>0$. Le radici di tale eqauzione sono $x_1=-\sqrt{2}$ e $x_2=\sqrt{2}$. Il primo sistema è allora equivalente a $\begin{cases} x\geq -\frac{5}{2} \\ x<-\sqrt{2} \text{ oppure } x>\sqrt{2} \end{cases}$ la cui soluzione è: $-\frac{5}{2} \leq x < -\sqrt{2}$ oppure $x > \sqrt{2}$. Il secondo sistema è equivalente a $\begin{cases} x \leq -\frac{5}{2} \\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases}$ la cui soluzione è $\nexists x \in \mathbb{R}$. Allora l'unione delle soluzioni dei due sistemi, e quindi la soluzione dell'esercizio, è: $-\frac{5}{2} \leq x < -\sqrt{2}$ oppure $x > \sqrt{2}$.

(p) Il modulo di un'espressione è sempre positivo, quindi la disequazione è soddisfatta per qualsiasi valore di x, in simboli $\forall x \in \mathbb{R}$.

(q) L'espressione $|x-3|$ è sempre positiva ma deve valere $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$, in quanto il segno della disequazione è strattamente positivo, escludendo quindi il caso in cui l'espressione è uguale a zero. Allora il risultato della disequazione è proprio $x \neq 3$.