Esercitazione 9 - Soluzioni

Francesco Davì

30 novembre 2012

Soluzioni esercizio 1

Tre vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ si dicono linearmente dipendenti se esistono tre numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, non tutti nulli, tali che $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = \vec{0}$. Se invece l'unica soluzione di $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ è $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, i tre vettori sono linearmente indipendenti.

1. Per risolvere l'esercizio bisogna risolvere $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = \vec{0}$:
$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
che si traduce nel seguente sistema
$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = -\alpha_2 - 3\alpha_3 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} -\alpha_2 - 3\alpha_3 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = -\alpha_2 - 3\alpha_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_2 = \alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = -\alpha_2 - 3\alpha_3 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} 2\alpha_2 = \alpha_3 \\ 2(-\alpha_2 - 3\alpha_3) + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = -\alpha_2 - 3\alpha_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_2 = \alpha_3 \\ -3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = -\alpha_2 - 3\alpha_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$
Dato che la soluzione del sistema è $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ i tre vettori sono linearmente indipendenti.

2. Per risolvere l'esercizio bisogna risolvere $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = \vec{0}$:
$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
che si traduce nel seguente sistema
$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 4\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha_1 + 4\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 2\alpha_3 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 4\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 2\alpha_3 \\ -2(2\alpha_3) + \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha_1 + 4\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 2\alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3(2\alpha_3) + 4(-\alpha_3) - 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 2\alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \alpha_1 = 2\alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases}$$

Il sistema è quindi indeterminato, ammette cioé infinite soluzioni. È possibile fissare una soluzione scegliendo un arbitrario valore per α_3 e calcolando i relativi valori di α_1 e α_2. Ad esempio, ponendo $\alpha_3 = 1$, si ottiene $\alpha_1 = 2\alpha_3 = 2$ e $\alpha_2 = -\alpha_3 = -1$.
Allora vale l'espressione $2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$ attraverso la quale è possibile scrivere uno dei tre vettori come combinazione lineare degli altri due, ad esempio ottenendo $\vec{v}_3 = \vec{v}_2 - 2\vec{v}_1$.

Soluzioni esercizio 2

Il vettore $\vec{n} = (2, 1, 2)$ è ortogonale al piano π. La retta r parallela a $\vec{n}$ e passante per il punto P ha equazione cartesiana $\frac{(x-1)}{2} = \frac{(y-2)}{1} = \frac{(z+1)}{2} \Rightarrow \frac{(x-1)}{2} = y - 2 = \frac{(z+1)}{2}$.
Per calcolare il punto d'intersezione Q della retta r con il piano π bisogna risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{(x-1)}{2} = y - 2 & \text{(in quanto } Q \text{ appartiene a } r) \\ y - 2 = \frac{(z+1)}{2} & \text{(in quanto } Q \text{ appartiene a } r) \\ 2x + y + 2z = 10 & \text{(in quanto } Q \text{ appartiene a } \pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2(y-2) \\ z + 1 = 2(y-2) \\ 2x + y + 2z = 10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2y - 3 \\ z = 2y - 5 \\ 2x + y + 2z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 3 \\ z = 2y - 5 \\ 2(2y-3) + y + 2(2y-5) = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 3 \\ z = 2y - 5 \\ y = \frac{26}{9} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2\frac{26}{9} - 3 \\ z = 2\frac{26}{9} - 5 \\ y = \frac{26}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{25}{9} \\ z = \frac{7}{9} \\ y = \frac{26}{9} \end{cases}$$

Quindi $Q = (\frac{25}{9}, \frac{26}{9}, \frac{7}{9})$.
La distanza d del punto P dal piano π è uguale alla distanza tra il punto P e il punto Q ed è quindi uguale a
$\sqrt{(1 - \frac{25}{9})^2 + (2 - \frac{26}{9})^2 + (-1 - \frac{7}{9})^2} = \sqrt{(-\frac{16}{9})^2 + (-\frac{8}{9})^2 + (-\frac{16}{9})^2} = \sqrt{\frac{256}{81} + \frac{64}{81} + \frac{256}{81}} = \sqrt{\frac{576}{81}} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$.
Analogamente, si può considerare il vettore $\overrightarrow{PQ} = (1 - \frac{25}{9}, 2 - \frac{26}{9}, -1 - \frac{7}{9}) = (-\frac{16}{9}, -\frac{8}{9}, -\frac{16}{9})$ e calcolare la distanza d come
$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-\frac{16}{9})^2 + (-\frac{8}{9})^2 + (-\frac{16}{9})^2} = \frac{8}{3}$.

Soluzioni esercizio 3

Bisogna risolvere il seguente sistema
$\begin{cases} x+2y+4z=2 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$
Per ottenere un sistema equivalente contenente due espressioni in cui compaiano solo due variabili, è possibile sommare o sottrarre tra loro le espressioni, eventualmente moltiplicate per una costante. Ad esempio, sottraendo alla prima espressione la seconda moltiplicata per 2, si ottiene
$x+2y+4z-2(2x+y+z)=2-2(1) \Rightarrow -3x+2z=0$,
mentre sottraendo alla seconda espressione la prima moltiplicata per 2, si ottiene
$2x+y+z-2(x+2y+4z)=1-2(2) \Rightarrow -3y-7z=-3$.
Il sistema $\begin{cases} -3x+2z=0 \\ -3y-7z=-3 \end{cases}$ è quindi equivalente al precedente. Risolvendo, si ha
$\begin{cases} z=\frac{3x}{2} \\ z=\frac{-3y+3}{7} \end{cases}$
da cui segue che è possibile riscrivere le due equazioni nella seguente forma:

$$\frac{3x}{2}=\frac{-3y+3}{7}=z \Rightarrow \frac{x}{\frac{2}{3}}=\frac{y-1}{-\frac{7}{3}}=z$$

che rappresenta l'equazione cartesiana della retta r parallela al vettore $\vec{v}=(\frac{2}{3},-\frac{7}{3},1)$ e passante per il puno $P=(0,1,0)$ e che rappresenta l'intersezione dei piani $x+2y+4z=2$ e $2x+y+z=1$.
(Infatti, la generica equazione cartesiana di una retta parallela a un vettore $\vec{v}=(a,b,c)$ e passante per un punto $P=(x_0,y_0,z_0)$ è $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ e l'equazione in esame può essere riscritta come $\frac{x-0}{\frac{2}{3}}=\frac{y-1}{-\frac{7}{3}}=\frac{z-0}{1}$.
Si sarebbe anche potuto scrivere l'equazione nella seguente forma

$$\frac{3x}{2}=\frac{-3y+3}{7}=z \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{y-1}{-7}=\frac{z}{3}$$

che rappresenta l'equazione cartesiana della retta parallela al vettore $\vec{v}=(3,-7,3)$ e passante per il punto $P=(0,1,0)$, che coincide con la retta r.)

Soluzioni esercizio 4

1. $A+B=\begin{pmatrix} 3-1 & 1+0 \\ -2-4 & 2+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1+3 & 0+1 \\ -4-2 & 3+2 \end{pmatrix}=$ $B+A$

   $A-B=\begin{pmatrix} 3-(-1) & 1-0 \\ -2-(-4) & 2-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

   $B-A=\begin{pmatrix} -1-3 & 0-1 \\ -4-(-2) & 3-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=-(A-B)$

   $AB=\begin{pmatrix} 3(-1)+1(-4) & 3(0)+1(3) \\ -2(-1)+2(-4) & -2(0)+2(3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$

   $BA=\begin{pmatrix} -1(3)+0(-2) & -1(1)+0(2) \\ -4(3)+3(-2) & -4(1)+3(2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -18 & -1 \end{pmatrix}$

2. $\det A=3(2)-1(-2)=8$

   $\det B=-1(3)-0(-4)=-3$

3. Dato che $\det A=8\neq 0$ la matrice A è invertibile.
   La matrice dei cofattori di A è

   $\widetilde{A}=\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}(2) & (-1)^{1+2}(-2) \\ (-1)^{2+1}(1) & (-1)^{2+2}(3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

   La matrice trasposta di $\widetilde{A}$ è quindi
   $\widetilde{A}^T=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

   e la matrice inversa di A è uguale a
   $A^{-1}=\frac{\widetilde{A}^T}{\det A}=\begin{pmatrix} \frac{2}{8} & \frac{-1}{8} \\ \frac{2}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$

   Dato che $\det B=-3\neq 0$ la matrice B è invertibile.
   La matrice dei cofattori di B è

   $\widetilde{B}=\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}(3) & (-1)^{1+2}(-4) \\ (-1)^{2+1}(0) & (-1)^{2+2}(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

   La matrice trasposta di $\widetilde{B}$ è quindi
   $\widetilde{B}^T=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

   e la matrice inversa di B è uguale a
   $B^{-1}=\frac{\widetilde{B}^T}{\det B}=\begin{pmatrix} \frac{3}{-3} & 0 \\ \frac{4}{-3} & \frac{-1}{-3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$

4. $\det A^{-1} = \frac{1}{4}(\frac{3}{8}) - (-\frac{1}{8})(\frac{1}{4}) = \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = \frac{1}{\det A}$.

   $\det B^{-1} = -1(\frac{1}{3}) - 0(\frac{4}{3}) = -\frac{1}{3} = \frac{1}{\det B}$.

5. Si ha

   $\det(AB) = -7(6) - 3(-6) = -42 + 18 = -24$

   $\det(BA) = -3(2) - (-1)(-18) = -6 - 18 = -24$

   $\det A \cdot \det B = 8(-3) = -24$

   da cui segue che $\det(AB) = \det(BA) = \det A \cdot \det B$.

6. Dato che $\det(AB) = -24 \neq 0$ la matrice AB è invertibile.
   La matrice dei cofattori di AB è

   $\widetilde{AB} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}(6) & (-1)^{1+2}(-6) \\ (-1)^{2+1}(3) & (-1)^{2+2}(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$.

   La matrice trasposta di $\widetilde{AB}$ è quindi
   $\widetilde{AB}^T = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$

   e la matrice inversa di AB è uguale a
   $(AB)^{-1} = \frac{\widetilde{AB}^T}{\det(AB)} = \begin{pmatrix} \frac{6}{-24} & \frac{-3}{-24} \\ \frac{6}{-24} & \frac{-7}{-24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{24} \end{pmatrix}$.

   Dato che
   $B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1(\frac{1}{4}) + 0(\frac{1}{4}) & -1(-\frac{1}{8}) + 0(\frac{3}{8}) \\ -\frac{4}{3}(\frac{1}{4}) + \frac{1}{3}(\frac{1}{4}) & -\frac{4}{3}(-\frac{1}{8}) + \frac{1}{3}(\frac{3}{8}) \end{pmatrix} =$
   $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{24} \end{pmatrix}$
   si ha $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

7. Dato che $\det(BA) = -24 \neq 0$ la matrice BA è invertibile.
   La matrice dei cofattori di BA è

   $\widetilde{BA} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}(2) & (-1)^{1+2}(-18) \\ (-1)^{2+1}(-1) & (-1)^{2+2}(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 18 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

   La matrice trasposta di $\widetilde{BA}$ è quindi
   $\widetilde{BA}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 18 & -3 \end{pmatrix}$

   e la matrice inversa di BA è uguale a

$$(BA)^{-1} = \frac{\widetilde{BA}^T}{\det(BA)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{-24} & \frac{1}{-24} \\ \frac{18}{-24} & \frac{-3}{-24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & -\frac{1}{24} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Dato che
$A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(-1) + (-\frac{1}{8})(-\frac{4}{3}) & \frac{1}{4}(0) + (-\frac{1}{8})(\frac{1}{3}) \\ \frac{1}{4}(-1) + \frac{3}{8}(-\frac{4}{3}) & \frac{1}{4}(0) + \frac{3}{8}(\frac{1}{3}) \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & -\frac{1}{24} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$
si ha $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

8. $\det(AB)^{-1} = -\frac{1}{4}(\frac{7}{24}) - \frac{1}{8}(-\frac{1}{4}) = -\frac{7}{96} + \frac{1}{32} = \frac{-7+3}{96} = -\frac{4}{96} = -\frac{1}{24}$.

   Dato che
   $\det(BA)^{-1} = -\frac{1}{12}(\frac{1}{8}) - (-\frac{1}{24})(-\frac{3}{4}) = -\frac{1}{96} - \frac{1}{32} = \frac{-1-3}{96} = -\frac{4}{96} = -\frac{1}{24}$

   si ha $\det(AB)^{-1} = \det(BA)^{-1}$.