Esercitazione 4 - Soluzioni

Francesco Davì

26 ottobre 2012

Alcuni limiti notevoli[1]**:**

1. $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = 0$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
6. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$
7. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$ per $a>0$

Soluzioni esercizio 1

Per risolvere i limiti assegnati, si verifica che costituiscono una forma indeterminata e si procede manipolando le espressioni per ottenere dei limiti notevoli.

(a) $\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2-2}{x^2-7})^{x^2} = (\frac{\infty}{\infty})^\infty$: forma indeterminata.
$\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2-2}{x^2-7})^{x^2} = \lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2-7+5}{x^2-7})^{x^2} = \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{5}{x^2-7})^{x^2} = \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{\frac{x^2-7}{5}})^{\frac{x^2-7}{5}\cdot\frac{x^2}{\frac{x^2-7}{5}}} = (\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{\frac{x^2-7}{5}})^{\frac{x^2-7}{5}})^{\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{x^2-7}}$.
Ponendo $y=\frac{x^2-7}{5}$ si ha che $x\to+\infty \Rightarrow y\to+\infty$ e si ottiene $(\lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y})^y)^{\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{x^2-7}} = e^5$, applicando il limite notevole 1.
(Si sarebbe anche potuto applicare direttamente il limite notevole $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{a}{x})^{bx} = e^{ab}$ con $a,b\in\mathbb{R}$ e ottenere

[1]Le dimostrazioni relative ai limiti notevoli qui esposti si trovano sugli appunti del corso, disponibili all'indirizzo internet `http://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/2013/MAT1/lezioni.pdf`

$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{5}{x^2-7})^{x^2} = \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{5}{x^2-7})^{x^2-7+7} =$
$(\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{5}{x^2-7})^{x^2-7}) \cdot (\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{5}{x^2-7})^{7}) =$
$(\lim_{y\to+\infty}(1+\frac{5}{y})^{y}) \cdot 1 = e^5$, ponendo $y = x^2 - 7$.)

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^3)}{\sin(x^2)\,(1-e^{2\,x})} = \frac{0}{0}$: forma indeterminata.
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^3)}{\sin(x^2)\,(1-e^{2\,x})} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^3)}{\sin(x^2)\,(1-e^{2\,x})} \cdot \frac{2\,x^3}{2\,x^3} =$
$\lim_{x\to 0}(\frac{\ln(1+x^3)}{x^3} \cdot \frac{x^2}{\sin(x^2)} \cdot \frac{2\,x}{(1-e^{2\,x})} \cdot \frac{1}{2}) =$
$\frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^3)}{x^3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin(x^2)}{x^2}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{-(e^{2\,x}-1)}{2\,x}}$.
Ponendo $w = x^3, y = x^2$ e $z = 2\,x$ si ha che $x \to 0 \Rightarrow w \to 0, y \to 0$ e $z \to 0$ e si ottiene:
$\frac{1}{2} \cdot \lim_{w\to 0} \frac{\ln(1+w)}{w} \cdot \frac{1}{\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y}} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{\lim_{z\to 0} \frac{(e^z-1)}{z}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -\frac{1}{2}$, applicando i limiti notevoli 2, 3 e 6.

(c) $\lim_{x\to 1} \frac{e^{2x-2}-1}{\sin(1-x)} = \frac{0}{0}$: forma indeterminata.
$\lim_{x\to 1} \frac{e^{2x-2}-1}{\sin(1-x)} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{2x-2}-1}{\sin(1-x)} \cdot \frac{2(x-1)}{2(x-1)} =$
$\lim_{x\to 1} \frac{e^{2(x-1)}-1}{2(x-1)} \cdot \frac{-(1-x)}{\sin(1-x)} \cdot 2 = 2 \cdot \lim_{x\to 1} \frac{e^{2(x-1)}-1}{2(x-1)} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{\lim_{x\to 1} \frac{\sin(1-x)}{1-x}}$.
Ponendo $y = 2(x-1)$ e $z = 1-x$ si ha che $x \to 1 \Rightarrow y \to 0$ e $z \to 0$ e si ottiene:
$2 \cdot \lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{\lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z}} = 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -2$, applicando i limiti notevoli 6 e 3.

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\ln(1+\mathrm{tg}^2(x))} = \frac{0}{0}$: forma indeterminata.
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\ln(1+\mathrm{tg}^2(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\ln(1+\mathrm{tg}^2(x))} \cdot \frac{\mathrm{tg}^2(x)}{\mathrm{tg}^2(x)} =$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\mathrm{tg}^2(x)} \cdot \frac{\mathrm{tg}^2(x)}{\ln(1+\mathrm{tg}^2(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} \cdot \frac{1}{\frac{\ln(1+\mathrm{tg}^2(x))}{\mathrm{tg}^2(x)}} =$
$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)(1-\cos(x))}{1-\cos^2(x)} \cdot \frac{1}{\frac{\ln(1+\mathrm{tg}^2(x))}{\mathrm{tg}^2(x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)(1-\cos(x))}{(1-\cos(x))(1+\cos(x))} \cdot \frac{1}{\frac{\ln(1+\mathrm{tg}^2(x))}{\mathrm{tg}^2(x)}} =$
$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)}{1+\cos(x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+\mathrm{tg}^2(x))}{\mathrm{tg}^2(x)}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+\mathrm{tg}^2(x))}{\mathrm{tg}^2(x)}}$.
Ponendo $y = \mathrm{tg}^2(x)$ si ha che $x \to 0 \Rightarrow y \to 0$ e si ottiene:
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y}} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$, applicando il limite notevole 2.

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{\ln(1+x^2)} = \frac{0}{0}$: forma indeterminata.
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{\ln(1+x^2)} \cdot \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\ln(1+x^2)} =$
$\lim_{x\to 0}(\frac{\sin(x)}{x})^2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}} = (\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x})^2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}} =$
$1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}}$, applicando il limite notevole 3.

Ponendo $y = x^2$ si ha che $x \to 0 \Rightarrow y \to 0$ e si ottiene:
$\lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = \frac{1}{\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y}} = 1$, applicando il limite notevole 2.

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x \ln(1+x)} = \frac{0}{0}$: forma indeterminata.
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x \ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x \ln(1+x)} \cdot \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+x)}{x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$, applicando i limiti notevoli 5 e 2.

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{3^{\sin(x)}-1}{x} = \frac{0}{0}$: forma indeterminata.
$\lim_{x\to 0} \frac{3^{\sin(x)}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3^{\sin(x)}-1}{x} \cdot \frac{\sin(x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3^{\sin(x)}-1}{\sin(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3^{\sin(x)}-1}{\sin(x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3^{\sin(x)}-1}{\sin(x)} \cdot 1$, applicando il limite notevole 3.
Ponendo $y = \sin(x)$ si ha che $x \to 0 \Rightarrow y \to 0$ e si ottiene:
$\lim_{x\to 0} \frac{3^{\sin(x)}-1}{\sin(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{3^y-1}{y} = \ln 3$, applicando il limite notevole 7.

(h) $\lim_{x\to 1} \frac{2^{3x-3}-1}{3x^2+x-4} = \frac{0}{0}$: forma indeterminata.
Per l'equazione $3x^2 + x - 4 = 0$ si ha $x_1 = -\frac{4}{3}$ e $x_2 = 1$, quindi si ottiene:
$\lim_{x\to 1} \frac{2^{3x-3}-1}{3x^2+x-4} = \lim_{x\to 1} \frac{2^{3x-3}-1}{3(x-1)(x+\frac{4}{3})} = \lim_{x\to 1} \frac{2^{3(x-1)}-1}{3(x-1)} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+\frac{4}{3})} = \lim_{x\to 1} \frac{2^{3(x-1)}-1}{3(x-1)} \cdot \frac{1}{\frac{7}{3}}$.
Ponendo $y = 3(x-1)$ si ha che $x \to 1 \Rightarrow y \to 0$ e si ottiene:
$\frac{3}{7} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{2^y-1}{y} = \frac{3}{7} \cdot \ln 2$, applicando il limite notevole 7.

(i) $\lim_{x\to -1} \frac{1-\cos(x^2-1)}{e^{x+1}-1} = \frac{0}{0}$: forma indeterminata.
$\lim_{x\to -1} \frac{1-\cos(x^2-1)}{e^{x+1}-1} = \lim_{x\to -1} \frac{1-\cos(x^2-1)}{e^{x+1}-1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2-1} =$
$\lim_{x\to -1} \frac{1-\cos(x^2-1)}{x^2-1} \cdot \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{e^{x+1}-1} \cdot \lim_{x\to -1}(x-1) =$
$\lim_{x\to -1} \frac{1-\cos(x^2-1)}{x^2-1} \cdot \lim_{x\to -1} \frac{1}{\frac{e^{x+1}-1}{x+1}} \cdot (-2)$.
Ponendo $y = x^2 - 1$ e $z = x + 1$ si ha che $x \to -1 \Rightarrow y \to 0$ e $z \to 0$ e si ottiene:
$(-2) \cdot \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos(y)}{y} \cdot \frac{1}{\lim_{z\to 0} \frac{e^z-1}{z}} = (-2) \cdot 0 \cdot 1 = 0$, applicando i limiti notevoli 4 e 6.

Errata

A differenza di quanto visto durante l'esercitazione, $\lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-1}{1-\cos(1-x)}$ non esiste ma si ha $\lim_{x\to 1^+} \frac{e^{x-1}-1}{1-\cos(1-x)} = +\infty$ e $\lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}-1}{1-\cos(1-x)} = -\infty$.
Infatti:
$\lim_{x\to 1^+} \frac{e^{x-1}-1}{1-\cos(1-x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^{x-1}-1}{1-\cos(1-x)} \cdot \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{1-\cos(1-x)} =$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} \cdot \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{1-\cos(1-x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} \cdot \lim_{x\to 1^+} \frac{-(1-x)}{1-\cos(1-x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{\lim_{x\to 1^+} \frac{1-\cos(1-x)}{1-x}}$. Si può notare che, ponendo $y = x-1$ e ottenendo quindi $x \to 1 \Rightarrow y \to 0$, si ha $\lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} = \lim_{y\to 0} \frac{e^{y}-1}{y} = 1$, applicando il limite notevole 6. Allora vale anche $\lim_{x\to 1^+} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} = 1$ (in quanto se esiste il limite per $x \to 1$ allora esiste ed è uguale anche per $x \to 1^+$ e $x \to 1^-$).
Inoltre, si può notare che $\lim_{x\to 1^+} \frac{1-\cos(1-x)}{1-x} = 0^-$, in quanto per x che tende a 1 da destra, la funzione in esame tende a 0 da sinistra (ha quindi segno negativo). Quindi $\lim_{x\to 1^+} \frac{e^{x-1}-1}{1-\cos(1-x)} = 1 \cdot (-1) \cdot -\infty = +\infty$.
Analogamente, si ottiene:
$\lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}-1}{1-\cos(1-x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{\lim_{x\to 1^-} \frac{1-\cos(1-x)}{1-x}}$.
Per quanto già detto, vale $\lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} = 1$ e inoltre si può notare che $\lim_{x\to 1^-} \frac{1-\cos(1-x)}{1-x} = 0^+$, in quanto per x che tende a 1 da sinistra, la funzione in esame tende a 0 da destra (ha quindi segno positivo). Quindi $\lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}-1}{1-\cos(1-x)} = 1 \cdot (-1) \cdot +\infty = -\infty$.