Esercitazione 5 - Soluzioni

Francesco Davì

2 novembre 2012

Alcune regole di derivazione[1]**:**

1. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
2. $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
3. $(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
4. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

Soluzioni esercizio 1

(a) Si applica la formula 1 con $f(x) = 3^x + \ln x$ e $g(x) = x^3$. Si può notare che $h(x) = 3^x = e^{\ln 3^x} = e^{x \ln 3}$, quindi la funzione $h(x)$ è una funzione composta $h_1(h_2(x))$ con $h_1(x) = e^x$ e $h_2(x) = x \ln 3$. Applicando quindi la formula 3 segue che $h'(x) = (h_1(h_2(x)))' = h_1'(h_2(x)) \cdot h_2'(x) = e^{x \ln 3} \ln 3 = 3^x \ln 3$ (in quanto $\ln 3$ è una costante numerica e quindi la derivata di $x \ln 3$ è uguale a $\ln 3$, dato che vale $(kx)' = k, \forall k \in \mathbb{R}$). Allora la soluzione dell'esercizio è: $(3^x \ln 3 + \frac{1}{x})(x^3) + (3^x + \ln x)(3x^2) = 3^x \cdot x^3 \cdot \ln 3 + x^2 + 3^{x+1} \cdot x^2 + 3x^2 \cdot \ln x = x^2 \cdot (3^x \cdot x \cdot \ln 3 + 1 + 3^{x+1} + 3 \cdot \ln x)$.

(b) La funzione in esame è costituita dalla differenza delle due funzioni $(\sin x)\,(\text{tg}(x) - 1)$ e $\frac{1}{\cos x}$, quindi per calcolarne la derivata si applica la formula 4. Inoltre, bisogna notare che $(\sin x)\,(\text{tg}(x) - 1)$ è il prodotto di due funzioni ($f(x) = \sin x$ e $g(x) = \text{tg}(x) - 1$) e quindi per calcolarne la derivata si applica la formula 1. La funzione $\frac{1}{\cos x}$ può essere considerata come il rapporto di due funzioni $\frac{h_1}{h_2}$ con $h_1 = 1$ e $h_2 = \cos x$ oppure come la funzione composta $h_3(h_4(x))$ con $h_3 = x^{-1}$ e $h_4(x) = \cos x$ (in quanto $\frac{1}{\cos x} = (\cos x)^{-1}$), quindi per calcolarne la derivata si può applicare la formula 2 oppure la formula 3, rispettivamente. Allora la soluzione dell'esercizio è: $(\cos x)\,(\text{tg}(x) - 1) + (\sin x)\,(\frac{1}{\cos^2 x}) - \frac{\sin x}{\cos^2 x} = (\cos x)\,(\text{tg}(x) - 1) + \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x} = (\cos x)\,(\text{tg}(x) - 1) = (\cos x)\,(\frac{\sin x}{\cos x} - 1) = \sin x - \cos x$.

[1] Le dimostrazioni relative si trovano sugli appunti del corso, disponibili all'indirizzo internet `http://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/2013/MAT1/lezioni.pdf`

(c) La funzione è costituita dal prodotto delle due funzioni $f(x) = \sin^3(2x)$ e $g(x) = \cos^2(3x)$, quindi per calcolarne la derivata bisogna applicare la formula 1. Inoltre, sia $f(x)$ che $g(x)$ sono funzioni composte $h_1(h_2(h_3(x))$ (ad esempio, per $f(x)$ si ha $h_1(x) = x^3$, $h_2(x) = \sin x$, $h_3(x) = 2x$), motivo per cui per calcolarne le derivata bisogna applicare due volte la formula 3: $(h_1(h_2(h_3(x))))' = h_1'(h_2(h_3(x)))\cdot(h_2(h_3(x)))' = h_1'(h_2(h_3(x))) \cdot h_2'(h_3(x)) \cdot h_3'(x)$. Allora la soluzione dell'esercizio è: $((3\sin^2(2x)) \cdot (\cos(2x)) \cdot (2)) \cdot (\cos^2(3x)) + (\sin^3(2x)) \cdot ((2\cos(3x)) \cdot (-\sin(3x))\cdot(3)) = 6\cdot\sin^2(2x)\cdot\cos(3x)\cdot(\cos(2x)\cos(3x)-\sin(2x)\sin(3x)) = 6 \cdot \sin^2(2x) \cdot \cos(3x) \cdot \cos(2x+3x) = 6 \cdot \sin^2(2x) \cdot \cos(3x) \cdot \cos(5x)$.

(d) Per derivare la funzione bisogna aplicare la formula 2, in quanto rapporto di due funzioni. Si può inoltre notare che $\sqrt{x+1}$ è equivalente a $(x+1)^{\frac{1}{2}}$ che è una funzione composta con $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ e $g(x) = x+1$, per calcolarne la derivata bisogna quindi applicare la formula 3 (analoga osservazione vale per $\sqrt{x-1}$). Allora la soluzione dell'esercizio è: $\frac{(\frac{1}{2}\cdot(x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1))\cdot\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\cdot(\frac{1}{2}\cdot(x-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1))}{(\sqrt{x-1})^2} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}}{x-1} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}}{x-1} = \frac{\frac{1}{2}\frac{x-1-(x+1)}{\sqrt{(x+1)(x-1)}}}{x-1} = -\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{(1-x)\sqrt{x^2-1}}$.

(e) Bisogna applicare la formula 1 e notare che $\cos(x^2+3)$ è una funzione composta e che quindi il calcolo della relativa derivata richiede l'applicazione della formula 3. La soluzione dell'esercizio è quindi: $3((2x)(\cos(x^2+3)) + (x^2)(-\sin(x^2+3))(2x)) = 6x(\cos(x^2+3) - x^2\sin(x^2+3))$.

(f) Bisogna applicare la formula 3 in quanto la funzione è composta da $f(x) = \ln|x|$ e $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$ e notare che per derivare $g(x)$ bisogna applicare la formula 2, in quanto rapporto di funzioni. La soluzione dell'esercizio è quindi: $\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}\frac{(-1)(1+x)-(1-x)(1)}{(1+x)^2} = \frac{1+x}{1-x}\frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-2}{1-x^2} = \frac{2}{x^2-1}$.

(g) La funzione in esame è una funzione composta $f(g(h(x)))$ con $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^x$ e $h(x) = x^2$, quindi per calcolarne la derivata bisogna applicare due volte la formula 3. Si può notare che $x^{x^2} = e^{\ln x^{x^2}} = e^{x^2 \ln x}$, quindi la funzione è composta dalle funzioni $f(x) = \sin x$, $g(x) = e^x$ e $h(x) = x^2\ln x$. Allora per calcolare la derivata di $h(x)$ bisogna applicare la formula 1 in quanto prodotto di due funzioni. La soluzione dell'esercizio è quindi: $\cos(x^{x^2}) \cdot e^{x^2\ln x} \cdot (2x\ln x + x^2\frac{1}{x}) = \cos(x^{x^2}) \cdot x^{x^2} \cdot x(2\ln x + 1) = \cos(x^{x^2}) \cdot x^{x^2+1} \cdot (2\ln x + 1)$.

Soluzioni esercizio 2

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{3x^2}}{x\sin(2x)}=\frac{0}{0}$: forma indeterminata.

$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{3x^2}}{x\sin(2x)}\overset{de\ l'Hôpital}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-e^{3x^2}\cdot(6x)}{\sin(2x)+x\cdot\cos(2x)\cdot 2}=\frac{0}{0}$: forma indeterminata.

$\lim_{x\to 0}\frac{-e^{3x^2}\cdot(6x)}{\sin(2x)+x\cdot\cos(2x)\cdot 2}=$

$\lim_{x\to 0}\frac{-6(e^{3x^2}\cdot x)}{\sin(2x)+2(x\cdot\cos(2x))}\overset{de\ l'Hôpital}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-6(e^{3x^2}\cdot(6x)\cdot x+e^{3x^2}\cdot 1)}{\cos(2x)\cdot 2+2(1\cdot\cos(2x)+x\cdot(-\sin(2x))\cdot 2)}=$

$\lim_{x\to 0}\frac{-6e^{3x^2}(6x^2+1)}{2\cos(2x)+2(\cos(2x)-2x\sin(2x))}=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}$.

(b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\cos x}=\frac{0}{0}$: forma indeteminata.

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\cos x}\overset{de\ l'Hôpital}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{0}{1}=0$.

(c) $\lim_{x\to+\infty}(1+\sin(\frac{3}{x}))^x=1^\infty$: forma indeterminata. Per poter applicare le regole di de l'Hôpital bisogna riscrivere l'espressione in una forma equivalente che dia luogo però a una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$ (per $x\to+\infty$).

$\lim_{x\to+\infty}e^{\ln(1+\sin(\frac{3}{x}))^x}=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln(1+\sin(\frac{3}{x}))}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\sin(\frac{3}{x}))}{\frac{1}{x}}}$, dato che $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\sin(\frac{3}{x}))}{\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}$ è possibile applicare de l'Hôpital.

$e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\sin(\frac{3}{x}))}{\frac{1}{x}}}\overset{de\ l'Hôpital}{=}e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\sin(\frac{3}{x})}\cdot\cos(\frac{3}{x})\cdot 3\cdot(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}}=$
$e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cos(\frac{3}{x})}{1+\sin(\frac{3}{x})}}=e^3$.

(d) $\lim_{x\to 0}(\cos(2x))^{\frac{1}{x^2}}=1^\infty$: forma indeterminata. Per poter applicare le regole di de l'Hôpital bisogna riscrivere l'espressione in una forma equivalente che dia luogo però a una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$ (per $x\to 0$).

$\lim_{x\to 0}(\cos(2x))^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\ln(\cos(2x))^{\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(2x))}{x^2}}$, dato che $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(2x))}{x^2}=\frac{0}{0}$ è possibile applicare de l'Hôpital.

$e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(2x))}{x^2}}\overset{de\ l'Hôpital}{=}e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos(2x)}\cdot(-\sin(2x))\cdot 2}{2x}}=e^{\lim_{x\to 0}-\frac{\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}}{x}}=$
$e^{\lim_{x\to 0}-\frac{\mathrm{tg}(2x)}{x}}=e^{\frac{0}{0}}$: forma indeterminata.

$e^{\lim_{x\to 0}-\frac{\mathrm{tg}(2x)}{x}}\overset{de\ l'Hôpital}{=}e^{\lim_{x\to 0}-\frac{\frac{1}{\cos^2(2)}\cdot 2}{1}}=e^{\lim_{x\to 0}-\frac{2}{\cos^2(2)}}=e^{-2}$.

(e) $\lim_{x\to 0}\frac{10^x-e^x}{x}=\frac{0}{0}$: forma indeterminata.

$\lim_{x\to 0}\frac{10^x-e^x}{x}\overset{de\ l'Hôpital}{=}\lim_{x\to 0}\frac{10^x\ln 10-e^x}{1}=\ln(10)-1$.

(f) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\frac{0}{0}$: forma indeterminata.

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)}\overset{de\ l'Hôpital}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-(-\sin x)}{\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot(1+x^2)}{2x}=\frac{0}{0}$:

forma indeterminata.
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x\cdot(1+x^2)}{2x} \stackrel{de\ l'Hôpital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x\cdot(1+x^2)+\sin x\cdot 2x}{2} = \frac{1}{2}.$